Казахский национальный университет имени аль-Фараби

Институт математики и математического моделирования

УДК 517.923 На правах рукописи

ДЕРБІСАЛЫ БАУЫРЖАН ОҢТАЛАПҰЛЫ

Функция Грина несимметричных характеристических начально-краевых задач для гиперболического уравнения

6D060100 – Математика

Диссертация на соискание
степени доктора философии (PhD)

Отечественный научный консультант
доктор физико-математических наук,
профессор
М.А. Садыбеков

Зарубежный научный консультант
доктор физико-математических наук,
профессор
А. Ашыралыев
(Bahcesehir University)

Республика Казахстан
Алматы, 2023

СОДЕРЖАНИЕ

НОРМАТИВНЫЕ ССЫЛКИ.. 4
ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ.. 5
ВВЕДЕНИЕ... 6
1 О ФУНКЦИИ ГРИНА ЗАДАЧИ КОШИ-ДИРИХЛЕ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ………………………………………………………… 13
1.1 Постановка задачи.. 14
1.2 Доказательство корректности задачи.. 15
1.3 О функции Римана.. 20
1.4 О функции Грина…………………………………………………….. 24
1.5 Существование и единственность функции Грина задачи………….... 25
1.6 Построение функции Грина………………………………………….. 30
2 О ФУНКЦИИ ГРИНА ЗАДАЧИ КОШИ-НЕЙМАНА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ………………………………………………………… 36
2.1 Постановка задачи.. 36
2.2 О функции Грина……………………………………………………... 37
2.3 Существование и единственность функции Грина задачи…………… 38
2.4 Построение функции Грина………………………………………….. 42
3 О ФУНКЦИИ ГРИНА ЗАДАЧИ ДАРБУ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ…………………………….. 46
3.1 Постановка задачи.. 46
3.2 Доказательство корректности задачи.. 47
3.3 О функции Грина……………………………………………………... 52
3.4 Существование и единственность функции Грина задачи……….…. 53
3.5 Построение функции Грина………………………………………….. 57
4 О ФУНКЦИИ ГРИНА АСИММЕТРИЧНОЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ С УСЛОВИЕМ ДИРИХЛЕ.. 61
4.1 Постановка задачи.. 61
4.2 Доказательство существование решения задачи.................................. 61
4.3 Определение функции Грина……………………………………….... 63
4.4 Существование и единственность функции Грина задачи…………… 64
5 О ФУНКЦИИ ГРИНА АСИММЕТРИЧНОЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ С УСЛОВИЕМ НЕЙМАНА.. 69
5.1 Постановка задачи.. 69
5.2 Доказательство существование решения задачи.................................. 69

5.3 Определение функции Грина……………………………………………... 71
5.4 Существование и единственность функции Грина задачи…………..… 72
6 ПОСТРОЕНИЕ ПРИМЕРОВ КОРРЕКТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ, ИМЕЮЩЕЙ «НЕКЛАССИЧЕСКИЙ» ВИД ФУНКЦИИ ГРИНА…………………... 79
6.1 Пример 1.. 79
6.2 Пример 2.. 83
7 ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОБЪЕМНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА В ОБЛАСТИ С КРИВОЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЦЕЙ……………………………..…… 86
7.1 Постановка задачи.. 87
7.2 Построение граничных условий... 90
7.3 Единственность решения задачи... 97
7.4 Основные результаты.. 99
7.5 Случай волнового потенциала... 99
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.. 103
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ................................ 105

НОРМАТИВНЫЕ ССЫЛКИ

В настоящей диссертации использованы ссылки на следующие стандарты:

ГОСТ 7.1-84. Система стандартов по информации, библиотечному и издательскому делу. Библиографическое описание документа. Общие требования и правила составления.

ГОСТ 7.9-95 (ИСО 214-76). Система стандартов по информации, библиотечному и издательскому делу. Реферат и аннотация. Общие требования.

ГОСТ 7.12-93. Система стандартов по информации, библиотечному и издательскому делу. Библиографическая запись. Сокращение слов на русском языке. Общие требования и правила.

ГОСТ 7.32-2001. Межгосударственный стандарт. Система стандартов по информации, библиотечному и издательскому делу. Отчет о научно-исследовательской работе. Структура и правила оформления.

ГОСТ 8.417-81. Государственная система обеспечения единства измерений. Единицы физических величин.

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

$A > B$	– все элементы A больше чем элементы B
$\cup, \cap$	– объединение, пересечение
$a \in A$	– a элемент множества A
$a \notin A$	– a не элемент множества A
$\equiv$	– элементарная эквивалентность
$\lvert A \rvert$	– мощность множества A
$\mathbb{R}^n$	– евклидово пространство размерности $n, n \in N$
$C^k(D)$	– множество k раз непрерывно дифференцируемых функций, заданных на множестве D
$\sum_{k=1}^{n} a_k$	– сумма a_k, где k принимает значение от 1 до n
$\int_a^b f(x)dx$	– интеграл от a до b функции f по переменной x
$f^n(x)$	– n-я производная функции f по переменной x
$a, b, c, \dots$	– элементы структуры
$\det\lvert B \rvert$	– определитель матрицы
A^{-1}	– обратный оператор к оператору A
$\neq$	– не равенство
$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$	– частная производная функции f от переменных x, y по переменной y

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Понятие функции Грина – одно из хорошо разработанных в современной математике. Исторически, это связано с именем George Green и его работой «An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism» (1828), в которой изучалась проблема в общих областях с общими граничными условиями. Он свел проблему к проблеме построения «потенциальных функций», которые в современной науке мы называем функциями Грина.

В абстрактном виде мы можем сформулировать это понятие следующим образом. Пусть в некоторой области $\Omega \subset R^n$ задано линейное дифференциальное уравнение:

$$L\,u(x) = f(x),\ x \in \Omega, \tag{1}$$

и некоторые однородные краевые условия:

$$Q\,u(x) = 0,\ x \in \partial\Omega. \tag{2}$$

Если решение этой задачи существует, единственно и может быть представлено в интегральном виде:

$$u(x) = \int_\Omega G_Q(x,y) f(y) dy, \tag{3}$$

то ядро этого интегрального оператора (3) – функцию $G_Q(x,y)$ – называют функцией Грина задачи (1), (2).

Также говорят, что функция Грина при каждом фиксированном $y \in \Omega$ удовлетворяет уравнению:

$$L\,G_Q(x,y) = \delta(x-y),\ x \in \Omega, \tag{4}$$

и краевым условиям (2). Здесь $\delta(x-y)$ – дельта-функция Дирака. Уравнение (4) следует понимать в смысле обобщенных функций.

Конечно же, это только общее понятие о функции Грина. При этом, в каждом конкретном случае, необходимо формулировать более точные определения, напрямую привязанные к типам уравнений и краевых условий.

Наиболее полное понятие функции Грина разработано для задач Штурма-Лиувилля для обыкновенного дифференциального уравнения, для краевых задач Дирихле для уравнения Пуассона, для начально-краевых задач для уравнения теплопроводности. Для многих частных случаев функция Грина была построена в явном виде. Однако, еще многие задачи требуют своего рассмотрения.

В настоящей диссертации мы исследуем задачу о построении функции Грина для краевых задач для гиперболического уравнения. Функция Грина для гиперболических задач существенно отличается от функций Грина задач для уравнений эллиптического и параболического типа. Пусть $G_Q(x,y)$ есть функция Грина задачи (1), (2), а $G_P(x,y)$ есть функция Грина другой задачи для уравнения (1) - задачи с краевым условием:

$$P\,u(x) = 0,\ x \in \partial\Omega. \tag{5}$$

Для задач для уравнений эллиптического и параболического типа можно показать, что разность двух функций Грина:

$$g(x,y) = G_Q(x,y) - G_P(x,y)$$

является уже «более гладкой» функцией и является решением однородного уравнения:

$$L\,g(x,y) = 0,\ x,y \in \Omega. \tag{6}$$

Однако, для задач для уравнений гиперболического типа это уже не так. Функция $g(x,y)$ также может иметь особенности такого же порядка, как и функции Грина $G_Q(x,y)$ и $G_P(x,y)$.

Таким образом, если для задач для уравнений эллиптического и параболического типа функция Грина может быть представлена в виде суммы «главной части с особенностью» и «гладкого слагаемого»:

$$G_P(x,y) = G_Q(x,y) - g(x,y),$$

то для гиперболических краевых задач это уже не так. Этот факт существенно усложняет рассмотрение и поэтому для каждого отдельного случая краевых задач требуется отдельное исследование.

Цели и задачи исследования обоснование метода функции Грина для несимметричных характеристических начально-краевых задач для гиперболического уравнения в характеристическом треугольнике.

Основные положения для защиты диссертации:

1. Построение функции Грина для первой начально-краевой задачи в четверти плоскости для общего двумерного гиперболического уравнения второго порядка.

2. Построение функции Грина для второй начально-краевой задачи в четверти плоскости для общего двумерного гиперболического уравнения второго порядка.

3. Построение функции Грина задачи Дарбу для гиперболического уравнения общего вида, рассматриваемого в характеристическом треугольнике с краевым условием первого рода на нехарактеристической границе.

4. Построение функции Грина для несимметричных характеристических краевых задач для гиперболического уравнения общего вида, рассматриваемого

в характеристическом треугольнике с краевым условием первого рода на нехарактеристической границе.

5. Построение функции Грина для несимметричных характеристических краевых задач для гиперболического уравнения общего вида, рассматриваемого в характеристическом треугольнике с краевым условием второго рода на нехарактеристической границе.

6. Построение примера корректной характеристической краевой задачи, имеющей «неклассический» вид функции Грина.

7. Построение граничных условий объемного гиперболического потенциала в области с криволинейной границей.

Объекты исследования общее гиперболическое уравнение второго порядка с переменными коэффициентами.

Предметы исследования являются построение функции Грина для общего гиперболического уравнения с переменными коэффициентами.

Методы исследования. В диссертации используются методы теории дифференциальных уравнений с частными производными, теории функций, теории потенциала, теории специальных функций и теории дифференциальной геометрии.

Новизна исследования. Задачи, рассмотренные в настоящей диссертаций, являются новыми. Из предыдущих работ, связанных с этой темой, следует отметить работы [1-24].

Прежде всего, отметим статьи [1, p. 277-281; 2, p. 75-78; 3, p. 189-191; 4, p. 285-300], в которых, по-видимому, предпринимались попытки установить аналоги теорем сравнения Штурма для гиперболических задач. Однако стало ясно, что эти расширения классических результатов теории обыкновенных дифференциальных операторов до гиперболических задач требуют осторожности и особого внимания к граничным условиям и типу области, в которой рассматривается задача.

Одно из объяснений этому было дано в работах Т.Ш. Кальменова [5, p. 63-66; 6, p. 64-66], в которых были вычислены собственные значения и собственные функции одного класса краевых задач со смещением для волнового уравнения в характеристическом треугольнике. Было показано, что собственные значения задачи имеют два ряда, вещественные части которых стремятся к $-\infty$ и $+\infty$ соответственно. Таким образом, даже в самосопряженном случае, хотя собственные значения задачи реальны, оператор не является положительно определенным. Это существенно отличает гиперболические задачи от краевых задач для эллиптических и параболических уравнений. Отметим, что эти исследования были продолжены в наших последующих работах [7, p. 482-487; 8, p. 1152-1154; 9, p. 41-46].

Чтобы избежать возникших проблем, в [10, p. 203-210] было предложено рассмотреть построение функции Грина для задач в характеристическом треугольнике $D = \{(x,t): t - T < x < T - t,\ 0 < t < T\}$ для волнового уравнения:

$$u_{tt} - u_{xx} = f(x,t),\ (x,t) \in D. \tag{7}$$

Задачи по нахождению коэффициента k относительно начальных условий:

$$\begin{matrix} u(x,0) = kg(x),\ u_t(x,0) = 0, \\ \text{или} \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = kg(x), \end{matrix} \quad -T < x < T, \tag{8}$$

и следующее дополнительное условие была рассмотрена:

$$u(0,T) = 0\ \ (\text{или}\ \ u_t(0,T) = 0). \tag{9}$$

Согласно современной терминологии, эти задачи являются обратными задачами восстановления коэффициента.

При решении этих задач возникла конструкция, напоминающая функцию Грина. Используя эту функцию, в области D мы можем решать задачи (7)-(9) для волнового уравнения с коэффициентом более низкого порядка:

$$u_{tt} - u_{xx} + p(x,t)u = 0,\ (x,t) \in D. \tag{10}$$

Очевидно, что, имея функцию Грина, решение уравнения (10) с условиями (8), (9) может быть сведено к решению интегрального уравнения. Далее, результаты сравнения двух положительных решений $u_1 \leq u_2$ для задачи (8), (9) для уравнения (10) с различными потенциалами $p_2 \leq p_1$ были получены с использованием метода из монографии М.А. Красносельского [11, p. 59-94].

Возможность использования функции Грина для получения таких результатов побудила к более детальному исследованию самой функции Грина гиперболических задач в характеристическом треугольнике. Варианты различных характерных краевых задач для гиперболических уравнений и систем были рассмотрены в [12, p. 272-279; 13, p. 101-105; 14, p. 129-132; 15, p. 219-226; 16, p. 371-375; 17, p. 835-845; 18, p. 261-271; 19, p. 65-78; 20, p. 349-356; 21, p. 153-161; 22, p. 1-9; 23, p. 657-671; 24, p. 371-392]. Все случаи рассматриваемых задач были самосопряженными.

В работе [22, p. 1-9] рассматривалось одномерное волновое уравнение с квадратичной и гиперболической нелинейностями. Используя метод обобщенного разделения переменных, показано, что иерархия нелинейных волновых уравнений может быть сведена к нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям второго порядка, к которым применим метод Фраски. В [23, p. 657-671] функция Грина была вычислена для задачи Дирихле, связанной с гиперболическим уравнением теплопроводности в пространственном интервале [0,1]. Было показано, что его функция Грина не обязательно должны быть непрерывными во всех точках области. В [24, p. 371-392] авторы рассмотрели класс гипоэллиптических операторов:

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{m_0} a_{i,j}(z)\partial_{x_i,x_j}u + \sum_{i,j=1}^{N} b_{i,j}x_i\partial_{x_j}u - \partial_t u$$

где $z = (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}$, $0 < m_0 \le N$, а коэффициенты $a_{i,j}$ принадлежит пространству исчезающих колебания функции, $B = (b_{i,j})$ - постоянная матрица вещественных чисел. В выше указанной работе они доказали, что сильное решение дифференциального уравнения $Lu = f$ с известным членом f в пространстве Морри $L^{p,\lambda}$ принадлежит подходящему пространству Соболев-Морри $S^{p,\lambda}$.

Одним из наиболее значительных достижений в построении функции Грина характеристической краевой задачи была работа L. Haws [19, p. 65-78]. Он рассмотрел двумерное гиперболическое уравнение:

$$u_{xy} + p(x,y)u = f(x,y),\ (x,y) \in \Gamma, \tag{11}$$

в характеристическом треугольнике $\Gamma = \{(x,y): 0 < x < y < 1\}$.

В качестве граничного условия на нехарактеристической линии AB было выбрано одно из следующих двух условий: либо граничное условие первого рода:

$$u(x,x) = 0, \qquad 0 \le x \le 1,$$

или граничное условие второго рода

$$(u_x - u_y)(x,x) = 0, \qquad 0 \le x \le 1,$$

и было использовано условие в точке C:

$$u(0,1) = 0.$$

Задача была дополнена еще одним условием, обеспечивающим симметрию функции Грина рассматриваемой задачи. В качестве примера было предложено использовать самосопряженные граничные условия со смещением из работ Т.Ш. Кальменова [5, p. 63-66; 6, p. 64-66].

В общем случае задача была только сформулирована, но не решена. Для частного случая $p(x,y) \equiv 0$ было дано определение функции Грина и указан метод ее построения.

Решение задачи было представлено в виде суммы

$$u(x,y) = \iint_{R_i} G^i(x,y;\xi,\eta) f(\xi,\eta) d\xi d\eta,$$

где G^i - функция, определенная R_i.

Кроме того, для случая симметричного коэффициента:

$$p(x, y) = p(y, x) \quad (12)$$

возможность построения функции Грина была обоснована с использованием функции Римана-Грина. Однако используемый метод не позволяет отказаться от условия симметрии потенциала (12).

Автор также рассмотрел гиперболическое уравнение с коэффициентами более низкого порядка:

$$u_{xy} + au_x + bu_y + cu = f(x, y), \qquad (x, y) \in \Gamma.$$

Однако рассматривался только случай постоянных коэффициентов a, b, c.

Задача построения функции Грина характеристической краевой задачи с произвольными коэффициентами (без использования условия симметрии (12)) была выделена как нерешенная задача, интересная для дальнейшего рассмотрения.

Теоретическая и практическая значимость исследования. Исследования по теме носят, в основном теоретический и фундаментальный характер. Их научная значимость обусловлена именно глубоким уровнем фундаментальности получаемых результатов.

Связь диссертационной работы с другими научно-исследовательскими работами. Диссертационная работа выполнена в рамках научного проекта программы грантового финансирования фундаментальных исследований в области естественных наук Министерства образования и науки Республики Казахстан «Функция Грина несимметричных характеристических начально-краевых задач для гиперболического уравнения» (2021 год, AP09561656).

Апробация работы.

Результаты работы были представлены и обсуждены на следующих конференциях:

– международной научной конференции “Numerical Function Analysis” (Стамбул, 2021 – 21-24 ноября);

– ежегодной международной традиционной Апрельской научной конференции, посвященной Дню работников науки Республики Казахстан, Институт математики и математического моделирования (Алматы, 2019 – 3-5 апреля);

– ежегодной международной традиционной Апрельской научной конференции, посвященной Дню работников науки Республики Казахстан, Институт математики и математического моделирования (Алматы, 2020 – 1-3 апреля).

Публикации. По результатам диссертации опубликовано 8 работ: 4 журнальные статьи (1 в журналах, индексируемых Scopus, и 3 в журнале, рекомендованном Комитетом по контролю в сфере образования и науки Министерства образования и науки Республики Казахстан), 4 работы в материалах международных научных конференциях (1 в Springer Proceedings).

Объем и структура диссертации. Диссертационная работа состоит из титульного листа, содержания, введения, семи разделов, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 108 страниц с 68 ссылками на литературу.

Основное содержание диссертации:

Введение содержит актуальность темы исследования, цели и задачи, основные положения для защиты диссертации, объект и предмет исследования, методы исследования, новизну и теоретическую и практическую значимость исследования, связь диссертационной работы с другими научно-исследовательскими работами, апробация работы, публикации автора, объем и структура диссертации и содержание.

В разделе 1, дано определение и обоснована методика построения функции Грина для первой начально-краевой задачи в четверти плоскости для общего двумерного гиперболического уравнения второго порядка.

В разделе 2, дано определение и обоснована методика построения функции Грина для второй начально-краевой задачи в четверти плоскости для общего двумерного гиперболического уравнения второго порядка.

В разделе 3, дано определение функции Грина задачи Дарбу для гиперболического уравнения общего вида, рассматриваемого в характеристическом треугольнике с краевым условием первого рода на нехарактеристической границе и дано обоснование методики её построения.

В разделе 4, дано определение функции Грина для несимметричных характеристических краевых задач для гиперболического уравнения общего вида, рассматриваемого в характеристическом треугольнике с краевым условием первого рода на нехарактеристической границе и дано обоснование методики её построения.

В разделе 5, дано определение функции Грина для несимметричных характеристических краевых задач для гиперболического уравнения общего вида, рассматриваемого в характеристическом треугольнике с краевым условием второго рода на нехарактеристической границе и дано обоснование методики её построения.

В разделе 6, построены примеры корректной характеристической краевой задачи, имеющей «неклассический» вид функции Грина.

В разделе 7, построена граничные условия объемного гиперболического потенциала в области с криволинейной границей.

В заключении представлены основные результаты, полученные в ходе выполнения диссертационной работы.

1 О ФУНКЦИИ ГРИНА ЗАДАЧИ КОШИ-ДИРИХЛЕ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ

Данный раздел посвящен обоснованию метода функций Грина для решения первой начально-краевой задачи для линейного гиперболического уравнения. Задача рассматривается в четвертной плоскости.

Метод функций Грина, хорошо разработанный для эллиптических и параболических задач, все еще мало разработан для гиперболических задач. В данном разделе введено определение функции Грина для гиперболической задачи (первой начально-краевой задачи), доказывается ее существование и единственность, а также построено интегральное представление решения задачи с использованием этой функции Грина.

Гиперболическая функция Грина существенно отличается от функций Грина для эллиптических или параболических задач. В частности, функция Грина гиперболической задачи может иметь разрывы по нескольким характеристикам уравнения. Как мы видим, в связи с этим для каждой гиперболической задачи определение и обоснование функции Грина необходимо проводить отдельно и требуются детальные исследования в этом направлении.

Если мы рассмотрим вопрос о классической разрешимости следующего гиперболического уравнения:

$$u_{tt} - u_{xx} = f(x,t),\ (x,t) \in S, \tag{1.1}$$

где $f \in C^1(\overline{S})$, $S = \{(x,t): 0 < x < 1,\ t > 0\}$, с начальным условием:

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0,\ 0 < x < 1, \tag{1.2}$$

и граничным условием:

$$u(0,t) = u(1,t) = 0,\ t > 0, \tag{1.3}$$

тогда методом Фурье [25], мы находим решение задачи (1.1)-(1.3) в следующем виде:

$$u(x,t) = \int_0^t d\tau \int_0^1 G(x,t;\xi,\tau) f(\xi,\tau) d\xi, \tag{1.4}$$

где

$$G(x,t;\xi,\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\sin k\pi x}{k\pi} \sin k\pi(t-\tau) \sin k\pi\xi \tag{1.5}$$

является функцией Грина задачи (1.1)-(1.3). Но из (1.5) мы не видим, какими свойствами обладает функция Грина задачи (1.1)-(1.3).

1.1 Постановка задачи

Пусть $Q = \{(x,t): x > 0, t > 0\}$. Следующее гиперболическое уравнение рассматривается в Q:

$$Lu \quad \equiv \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + a_1(x,t) \cdot \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} +$$

$$+b_1(x,t) \cdot \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + c_1(x,t) \cdot u(x,t) = F(x,t), (x,t) \in Q, \qquad (1.1.1)$$

с начальными условиями

$$u(x,0) = T(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = N(x),\ x > 0, \qquad (1.1.2)$$

и граничным условием

$$u(t,0) = \Phi(t),\ t > 0. \qquad (1.1.3)$$

Хорошо известно, что эта задача корректна, как в смысле классических, так и обобщенных решений. Нас интересует вопрос об интегральной форме решения задачи (1.1.1)-(1.1.3). Мы покажем, что решение задачи может быть записано в терминах функции Грина, определение которой мы вводим.

В характеристических координатах $\xi = x + t,\ \eta = x - t$ уравнение (1.1.1) имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + a(\xi,\eta) \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi} + b(\xi,\eta) \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta} + c(\xi,\eta) \cdot u = f(\xi,\eta), \quad (\xi,\eta) \in \Omega, \quad (1.1.4)$$

и начальные условия (1.1.2) имеют вид:

$$u(\xi,\xi) = \tau(\xi), \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)(\xi,\xi) = \nu(\xi),\ \xi > 0, \qquad (1.1.5)$$

и граничное условие (1.1.3) изменится на

$$u(-\eta,\eta) = \varphi(\eta),\ \eta \leq 0. \qquad (1.1.6)$$

Мы будем считать, что $a, b \in C^1(\overline{\Omega})$; $c,\ f \in C(\overline{\Omega})$; $\varphi \in C^1((-\infty,0])$; $\nu \in C([0,+\infty))$; $\tau \in C^1([0,+\infty))$; $\varphi'(0) = -\nu(0),\ \varphi(0) = \tau(0)$.

Цель состоит в том, чтобы построить функцию Грина и решение задачи (1.1.4)-(1.1.6).

1.2 Доказательство корректности задачи

Для полноты картины мы приводим здесь доказательство корректности рассматриваемой задачи (1.1.4)-(1.1.6).

Назовем функцию из класса $u(\xi,\eta), u_{\xi\eta} \in C(\overline{\Omega})$ регулярным решением задачи, преобразующим уравнение (1.1.4), начальные условия (1.1.5) и граничное условие (1.1.6) в тождество.

Теорема 1.2.1 Пусть $a, b \in C^1(\overline{\Omega})$; $c, f \in C(\overline{\Omega})$; $\varphi \in C^1((-\infty,0])$; $\nu \in C([0,+\infty))$; $\tau \in C^1([0,+\infty))$; $\varphi'(0) = -\nu(0)$, $\varphi(0) = \tau(0)$. Тогда задача (1.1.4)-(1.1.6) имеет единственное регулярное решение.

Доказательство существования решения задачи (1.1.4)-(1.1.6)

Пусть

$$u(\xi,\eta) = \zeta(\xi,\eta) \cdot \omega(\xi,\eta). \tag{1.2.1}$$

Тогда (1.1.4) имеет вид:

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial\xi\partial\eta} \cdot \omega \quad + \frac{\partial^2\omega}{\partial\xi\partial\eta} \cdot \zeta + \left[\frac{\partial\zeta}{\partial\xi} + b\zeta\right] \cdot \frac{\partial\omega}{\partial\eta} + \left[\frac{\partial\zeta}{\partial\eta} + a\zeta\right] \cdot \frac{\partial\omega}{\partial\xi} +$$

$$+ \left[b\frac{\partial\zeta}{\partial\eta} + a\frac{\partial\zeta}{\partial\xi} + c\zeta\right] \cdot \omega = f. \tag{1.2.2}$$

Мы выбираем $\zeta(\xi,\eta)$ таким образом, чтобы

$$\frac{\partial\zeta(\xi,\eta)}{\partial\xi} + b(\xi,\eta) \cdot \zeta(\xi,\eta) = 0, \tag{1.2.3}$$

выполнялось. Из (1.2.3) получим

$$\zeta(\xi,\eta) = \exp\left(-\int_0^\xi b(s,\eta)ds\right). \tag{1.2.4}$$

Разделив уравнение (1.2.2) на ζ, имеем следующую задачу:

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi\partial\eta} + a_2(\xi,\eta) \cdot \frac{\partial\omega}{\partial\xi} + c_2(\xi,\eta) \cdot \omega = f_2, \ (\xi,\eta) \in \Omega, \tag{1.2.5}$$

$$\omega(\xi,\xi) = \tau_2(\xi), \left(\frac{\partial\omega}{\partial\xi} - \frac{\partial\omega}{\partial\eta}\right)(\xi,\xi) = \nu_2(\xi), \ \xi > 0, \tag{1.2.6}$$

$$\omega(-\eta,\eta) = \varphi_2(\eta), \ \eta \le 0, \tag{1.2.7}$$

где

$$a_2 = \frac{1}{\zeta} \cdot \zeta_\eta + a,$$

$$c_2 = \frac{1}{\zeta}\left(\zeta_{\xi\eta} + a\zeta_\xi + b\zeta_\eta + c\right), \qquad \tau_2(\xi) = \frac{\tau(\xi)}{\zeta(\xi,\xi)}, \qquad \varphi_2(\eta) = \frac{\varphi(\eta)}{\zeta(-\eta,\eta)},$$

$$\nu_2(\xi) = \frac{\nu(\xi)}{\zeta(\xi,\xi)} - \frac{\tau_2(\xi)\left(\zeta_\xi(\xi,\xi) - \zeta_\eta(\xi,\xi)\right)}{\zeta(\xi,\xi)}, \qquad f_2(\xi,\eta) = \frac{f(\xi,\eta)}{\zeta(\xi,\eta)}.$$

Введем новое обозначение:

$$\frac{\partial\omega}{\partial\xi} = \upsilon.$$

Тогда уравнение (1.2.5) эквивалентно следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial\upsilon}{\partial\eta} = f_2(\xi,\eta) - a_2(\xi,\eta)\cdot\upsilon(\xi,\eta) - c_2(\xi,\eta)\cdot\omega(\xi,\eta), \\ \frac{\partial\omega}{\partial\xi} = \upsilon(\xi,\eta). \end{cases} \tag{1.2.8}$$

В области Ω возьмем произвольную точку $C(\xi,\eta)$ и проведем характеристики CB, CD, CA до границы области Ω. Интегрируя первое уравнение системы (1.2.8) по DC, AC, второе по BC и используя условия (1.2.6), (1.2.7), получим:

$$\begin{cases} \upsilon(\xi,\eta) = \psi(\xi) - \int_\eta^\xi \left[f_2(\xi,\eta_1) - a_2(\xi,\eta_1)\upsilon(\xi,\eta_1) - c_2(\xi,\eta_1)\omega(\xi,\eta_1)\right]d\eta_1, \\ \omega(\xi,\eta) = \tau_1(\eta) + \int_{|\eta|}^\xi \upsilon(\xi_1,\eta)d\xi_1, (\xi,\eta)\in\Omega, \end{cases} \tag{1.2.9}$$

где

$$\psi(\xi) = \tfrac{1}{2}\left(\tau_{2'}(\xi) + \nu_2(\xi)\right), \tag{1.2.10}$$

$$\tau_1(\eta) = \begin{cases} \tau_2(\eta), & \text{при } \eta > 0, \\ \varphi_2(\eta), & \text{при } \eta \le 0. \end{cases} \tag{1.2.11}$$

Легко показать, что если $\upsilon(\xi,\eta), \omega(\xi,\eta)$ являются решениями системы (1.2.9), то $\omega(\xi,\eta)$ является решением задачи (1.2.5)-(1.2.7). Следовательно, система (1.2.9) эквивалентна задаче (1.2.5)-(1.2.7).

Будем искать решение системы (1.2.9) используя метод последовательных приближений. Пусть M - произвольное положительное число. $\Omega_M = \Omega \cap \{\xi < M\}$ и для точек $(\xi, \eta) \in \Omega_M$ выберем начальное приближение:

$$v_0(\xi, \eta) = \psi(\xi), \quad \omega_0(\xi, \eta) = \tau_1(\eta).$$

Строим следующее приближение, используя формулы (1.2.12):

$$\begin{cases} v_n(\xi, \eta) = \psi(\xi) - \int\limits_{\eta}^{\xi} [f_2(\xi, \eta_1) - a_2(\xi, \eta_1) v_{n-1}(\xi, \eta_1) - c_2(\xi, \eta_1)\omega_{n-1}(\xi, \eta_1)] d\eta_1, \\ \omega_n(\xi, \eta) = \tau_1(\eta) + \int\limits_{|\eta|}^{\xi} v_{n-1}(\xi_1, \eta) d\xi_1, (\xi, \eta) \in \Omega_M. \end{cases} \tag{1.2.12}$$

Докажем равномерную сходимость последовательностей v_n, ω_n в замкнутой области $\overline{\Omega}_M$. Вычислим разность:

$$\begin{cases} v_{n+1} - v_n = \int\limits_{\eta}^{\xi} [a_2(v_n(\xi, \eta_1) - v_{n-1}(\xi, \eta_1)) + c_2(\omega_n(\xi, \eta_1) - \omega_{n-1}(\xi, \eta_1))] d\eta_1, \\ \omega_{n+1} - \omega_n = \int\limits_{|\eta|}^{\xi} [v_n(\xi_1, \eta) - v_{n-1}(\xi_1, \eta)] d\xi_1, (\xi, \eta) \in \Omega_M. \end{cases} \tag{1.2.13}$$

Покажем что разность $|v_n - v_{n-1}|$ и $|\omega_n - \omega_{n-1}|$ удовлетворяют неравенствам:

$$|v_n - v_{n-1}| \le K^n \cdot A \cdot \frac{(\xi - \eta)^n}{n!},$$

$$|\omega_n - \omega_{n-1}| \le K^n \cdot A \cdot \frac{(\xi - \eta)^n}{n!}, \tag{1.2.14}$$

где

$$K = \max_{\overline{\Omega}_M}[1, |a_2| + |c_2|],$$

$$A = \| f_2 \|_{C(\overline{\Omega}_M)} + \| \psi \|_{C([0,M])} + \| \tau_1 \|_{C([-M,M])}, \tag{1.2.15}$$

где $\tau_1(\eta), \psi(\xi)$ определены в (1.2.10), (1.2.11). Доказываем справедливость неравенств (1.2.14) с помощью математической индукции. Для $n = 1$, как легко видеть из (1.2.12), оценки (1.2.14) верный.

Покажем, что эти неравенства останутся в силе, когда n будет заменено на $n + 1$. Из равенства (1.2.13), согласно классическому методу, имеем

$$|\upsilon_{n+1} - \upsilon_n| \quad \le \int_{\eta}^{\xi} (|a_2| + |c_2|) \cdot K^n \cdot A \cdot \frac{(\xi - \eta_1)^n}{n!} d\eta_1 \le$$

$$\le K^{n+1} \cdot A \cdot \int_{\eta}^{\xi} \frac{(\xi - \eta_1)^n}{n!} d\eta_1 = \frac{K^{n+1}}{(n+1)!} \cdot A \cdot (\xi - \eta)^{n+1},$$

$$|\omega_{n+1} - \omega_n| \quad \le \int_{|\eta|}^{\xi} K^n \cdot A \cdot \frac{(\xi_1 - \eta)^n}{n!} d\xi_1 \le K^{n+1} \cdot A \cdot \int_{|\eta|}^{\xi} \frac{(\xi_1 - \eta)^n}{n!} d\xi_1 =$$

$$= \frac{K^{n+1}}{(n+1)!} \cdot A \cdot (\xi - \eta)^{n+1} - \frac{K^{n+1}}{(n+1)!} \cdot A \cdot (|\eta| - \eta)^{n+1} \le$$

$$\le \frac{K^{n+1}}{(n+1)!} \cdot A \cdot (\xi - \eta)^{n+1}.$$

Оценки (1.2.14) показывают абсолютную и равномерную сходимость по $\overline{\Omega}_M$ следующих рядов:

$$\upsilon_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\upsilon_n - \upsilon_{n-1}), \qquad \omega_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\omega_n - \omega_{n-1}),$$

члены которых меньше абсолютного значения членов равномерно сходящегося ряда:

$$A + A \cdot \sum_{n=1}^{\infty} K^n \frac{(\xi - \eta)^n}{n!} = A \cdot \exp(K(\xi - \eta)).$$

Следовательно, последовательные приближения υ_n, ω_n на $\overline{\Omega}_M$ равномерно стремятся, соответственно, к определенным пределам υ, ω которые непрерывны на $\overline{\Omega}_M$. Переходя к пределу в равенствах (1.2.12), получаем, что предельные функции $\upsilon(\xi, \eta), \omega(\xi, \eta)$ удовлетворяют системе (1.2.9). В этом случае функции υ, ω непрерывны на $\overline{\Omega}_M$. Поскольку мы доказали существование решения в $\overline{\Omega}_M$

для любого M, решение существует во всей области Ω. Решение задачи (1.1.4)-(1.1.6) найдено путем замены ω, φ на (1.2.1).

Доказательство единственности решения задачи (1.2.5)-(1.2.7)

Предположим, что система (1.2.9) имеет различные решения $\upsilon_1, \omega_1, \upsilon_2, \omega_2$. Обозначим $V = \upsilon_1 - \upsilon_2, W = \omega_1 - \omega_2$. Тогда V, W удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} V(\xi,\eta) = \int_\eta^\xi [a_2(\xi,\eta_1)\cdot V(\xi,\eta_1) + c_2(\xi,\eta_1)\cdot W(\xi,\eta_1)]d\eta_1, \\ W(\xi,\eta) = \int_{|\eta|}^\xi V(\xi_1,\eta)d\xi_1, (\xi,\eta) \in \Omega_M. \end{cases} \tag{1.2.16}$$

Докажем, что $V = W \equiv 0$. Функции V, W непрерывны и ограничены как разности непрерывных функций в замкнутой области $\overline{\Omega}_M$. Следовательно, существует положительная константа B такая, что

$$|V(\xi,\eta)| \le B, \qquad |W(\xi,\eta)| \le B, \qquad (\xi,\eta) \in \Omega_M.$$

Тогда из (1.2.16) имеем

$$|V| \le B\int_\eta^\xi (|a_2(\xi,\eta_1)| + |c_2(\xi,\eta_1)|)d\eta_1 \le K\frac{(\xi-\eta)}{1!},$$

$$|W| \le B\int_{|\eta|}^\xi Bd\xi_1 \le K\cdot\frac{(\xi-\eta)}{1!},$$

где K определяется в (1.2.15). С помощью математической индукции для любого n получим следующие оценки

$$|V| \le BK^n\frac{(\xi-\eta)^n}{n!}, |W| \le BK^n\frac{(\xi-\eta)^n}{n!}.$$

Поскольку эти неравенства выполняются для любого n, то из этого следует, что $V = W \equiv 0$, т.е. $\upsilon_1 = \upsilon_2,\ \omega_1 = \omega_2$.

Доказательство устойчивости решения задачи (1.2.5)-(1.2.7)

Чтобы доказать устойчивость решения задачи (1.2.5)-(1.2.7), нам нужна оценка устойчивости для ω. Из

$$\omega(\xi,\eta) = \lim_{N\to\infty}\omega_N = \lim_{N\to\infty}\left[\omega_0 + \sum_{n=1}^N (\omega_n - \omega_{n-1})\right] =$$

$$= \omega_0 + \sum_{n=1}^\infty (\omega_n - \omega_{n-1}), \tag{1.2.17}$$

затем, используя оценку (1.2.14) из (1.2.17), мы получим

$$|\omega(\xi,\eta)| \leq A \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K^n}{n!} (\xi-\eta)^n = A \cdot \exp(2KM), \qquad (1.2.18)$$

где A определа в (1.2.15). Используя равенство (1.2.15), из (1.2.18), мы имеем

$$|\omega(\xi,\eta)| \leq \exp(2KM) \cdot \left(\| f_1 \|_{C(\overline{\Omega}_M)} + \| \psi \|_{C([0,M])} + \| \tau_1 \|_{C([-M,M])} \right).$$

Следовательно, используя (1.2.10), (1.2.11), мы получаем оценку устойчивости решения задачи (1.2.5)-(1.2.7):

$$||\omega||_{C(\Omega_M)} \leq \exp(2KM)$$

$$\cdot \left(\| f_1 \|_{C(\overline{\Omega}_M)} + \| \nu_2 \|_{C([0,M])} + \| \tau_2 \|_{C^1([0,M])} + \| \varphi_2 \|_{C([-M,0])} \right).$$

1.3 О функции Римана

Хорошо известно, что функция Римана-Грина $R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)$ не определена во всей области $\Omega \times \Omega$, но только для тех точек $(\xi_1,\eta_1) \in \Omega$, для которых $|\eta| < \xi_1, -\xi < \eta_1 < \xi$. И для остальных точек области $\Omega \times \Omega$ функция Римана-Грина не определена однозначно. Для наших дальнейших построений нам важно использовать функцию Римана-Грина, определенную во всех точках области $\Omega \times \Omega$, для которой $\eta_1 < -\xi$.

Для дальнейших рассуждений нам нужно выполнить некоторые соотношения между коэффициентами $a(\xi,\eta)$ и $b(\xi,\eta)$ на границе $\xi = -\eta$. Для этого в уравнении (1.1.4) заменим функцию:

$$u(\xi,\eta) = U(\xi,\eta) \cdot \gamma(\eta) \cdot \mu(\xi). \qquad (1.3.1)$$

Тогда относительно новой неизвестной функции $U(\xi,\eta)$ получим уравнение:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\xi\partial\eta} + \hat{a}(\xi,\eta)\frac{\partial U}{\partial\xi} + \hat{b}(\xi,\eta)\frac{\partial U}{\partial\eta} + \hat{c}(\xi,\eta)U = \hat{f}, \ (\xi,\eta) \in \Omega, \qquad (1.3.2)$$

где

$$\hat{a} = \frac{1}{\gamma(\eta)} \cdot \left(\gamma'(\eta) + a(\xi,\eta)\gamma(\eta)\right), \qquad \hat{b} = \frac{1}{\mu(\xi)} \cdot \left(\mu'(\xi) + b(\xi,\eta)\mu(\xi)\right),$$

$$\hat{c} = \frac{\gamma'(\eta)\mu'(\xi)}{\gamma(\eta)\mu(\xi)} + a(\xi,\eta)\frac{\mu'(\xi)}{\mu(\xi)} + b(\xi,\eta)\frac{\gamma'(\eta)}{\gamma(\eta)} + c(\xi,\eta), \hat{f} = \frac{f}{\gamma(\eta)\mu(\xi)}. \quad (1.3.3)$$

Возьмем функции $\gamma(\eta), \mu(\xi)$ так, чтобы равенства

$$\hat{a}(-\eta,\eta) = -\hat{b}(-\eta,\eta),\ \widehat{a_\xi}(-\eta,\eta) = \widehat{b_\eta}(-\eta,\eta),\ \eta \le 0. \tag{1.3.4}$$

выполнялось. Тогда из (1.3.4) имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\gamma'(\eta)}{\gamma(\eta)} = -\frac{\mu'(-\eta)}{\mu(-\eta)} - a(-\eta,\eta) - b(-\eta,\eta), & \eta \le 0, \\ \frac{\gamma'(\eta)}{\gamma(\eta)} = \frac{\mu'(-\eta)}{\mu(-\eta)} - a_\xi(-\eta,\eta) + b_\eta(-\eta,\eta), & \eta \le 0. \end{cases} \tag{1.3.5}$$

Эта система (1.3.5) имеет решение, которое может быть записано как

$$\gamma(\eta) = \exp\left[\frac{1}{2}\int_0^\eta \left(b_\eta(-t,t) - a_\xi(-t,t) - a(-t,t) - b(-t,t)\right)dt\right],$$

$$\mu(\xi) = \exp\left[\frac{1}{2}\int_0^\xi \left(-b_\eta(t,-t) + a_\xi(t,-t) - a(t,-t) - b(t,-t)\right)dt\right].$$

Таким образом, если $\gamma(\eta), \mu(\xi)$ выбраны таким образом, условие (1.3.4) выполняется при $\eta \le 0$. При значениях $\eta > 0$ продолжаем функцию $\gamma(\eta)$ таким образом, чтобы она была непрерывно дифференцируемой и выполнялось условие $\gamma(\eta) > 0$.

Чтобы ввести функцию Римана-Грина во всех точках области $\Omega \times \Omega$, продолжим коэффициенты уравнения (1.3.2) в области $\Omega^- = \{(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2 : \eta < -|\xi|\}$ следующим образом:

$$A(\xi,\eta) = \begin{cases} \hat{a}(\xi,\eta), & (\xi,\eta) \in \Omega, \\ -\hat{b}(-\eta,-\xi), & (\xi,\eta) \in \Omega^-, \end{cases} \tag{1.3.6}$$

$$B(\xi,\eta) = \begin{cases} \hat{b}(\xi,\eta), & (\xi,\eta) \in \Omega, \\ -\hat{a}(-\eta,-\xi), & (\xi,\eta) \in \Omega^-, \end{cases} \tag{1.3.7}$$

$$C(\xi,\eta) = \begin{cases} \hat{c}(\xi,\eta), & (\xi,\eta) \in \Omega, \\ \hat{c}(-\eta,-\xi). & (\xi,\eta) \in \Omega^-. \end{cases} \tag{1.3.8}$$

Если коэффициенты $a(\xi,\eta), b(\xi,\eta) \in C^1(\overline{\Omega})$; $c(\xi,\eta) \in C(\overline{\Omega})$, то в силу (1.3.3), (1.3.4) коэффициенты $A(\xi,\eta)$, $B(\xi,\eta), C(\xi,\eta)$ в области $\widetilde{\Omega} = \Omega \cup \Omega^- = \{(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2 : \xi > \eta\}$ имеют следующие гладкость:

$$A(\xi,\eta), B(\xi,\eta) \in C^1(\overline{\Omega}); C(\xi,\eta) \in C(\overline{\Omega}), \tag{1.3.9}$$

и удовлетворяют следующим условиям симметрии:

$$A(\xi,\eta) = -B(-\eta,-\xi), \qquad A_\xi(\xi,\eta) = B_\eta(-\eta,-\xi),$$

$$C(\xi,\eta) = C(-\eta,-\xi), \quad (\xi,\eta) \in \widetilde{\Omega}. \tag{1.3.10}$$

Покажем, что (1.3.10) верно. Из (1.3.6) имеем

$$A(-\eta,-\xi) \quad = \begin{cases} \hat{a}(-\eta,-\xi), & (-\eta,-\xi) \in \Omega, \\ -\hat{b}(\xi,\eta), & (-\eta,-\xi) \in \Omega^-, \end{cases}$$

$$= -\begin{cases} \hat{b}(\xi,\eta), & (\xi,\eta) \in \Omega, \\ -\hat{a}(-\eta,-\xi), & (\xi,\eta) \in \Omega^-, \end{cases} = -B(\xi,\eta).$$

Также таким же образом, из (1.3.7), (1.3.8) получим

$$A_\xi(\xi,\eta) = \begin{cases} \widehat{a_\xi}(\xi,\eta), & (\xi,\eta) \in \Omega, \\ \widehat{b_\eta}(-\eta,-\xi), & (\xi,\eta) \in \Omega^-, \end{cases} = B_\eta(-\eta,-\xi),$$

$$C(\xi,\eta) = \begin{cases} \hat{c}(\xi,\eta), & (\xi,\eta) \in \Omega, \\ \hat{c}(-\eta,-\xi), & (\xi,\eta) \in \Omega^-, \end{cases} = C(-\eta,-\xi).$$

Если выбрать (ξ,η) из Ω, то $(-\eta,-\xi)$ будет из Ω^-.
В $\widetilde{\Omega}$ рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\xi\partial\eta} + A(\xi,\eta)\cdot\frac{\partial U}{\partial\xi} + B(\xi,\eta)\cdot\frac{\partial U}{\partial\eta} + C(\xi,\eta)\cdot U = F, \ (\xi,\eta) \in \widetilde{\Omega}. \tag{1.3.11}$$

Из-за гладкости (1.3.9) хорошо известно, что для уравнения (1.3.11) функция Римана-Грина [26] существует в $\widetilde{\Omega}$, что для любого $(\xi,\eta) \in \widetilde{\Omega}$ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi_1\partial\eta_1}R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1) - \frac{\partial}{\partial\xi_1}\big(A(\xi_1,\eta_1)R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)\big) -$$

$$-\frac{\partial}{\partial\eta_1}\big(B(\xi_1,\eta_1)R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)\big) +$$

$$+C(\xi_1,\eta_1)R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1) = 0, (\xi_1,\eta_1) \in \widetilde{\Omega}; \tag{1.3.12}$$

и следующим условиям на характеристиках:

$$\frac{\partial R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)}{\partial \eta_1} - A(\xi_1,\eta_1)\cdot R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1) = 0, \text{ при } \xi_1 = \xi; \qquad (1.3.13)$$

$$\frac{\partial R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)}{\partial \xi_1} - B(\xi_1,\eta_1)\cdot R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1) = 0, \text{при } \eta_1 = \eta; \qquad (1.3.14)$$

$$R(\xi,\eta;\xi,\eta) = 1. \qquad (1.3.15)$$

Таким образом, при таком выборе метода продолжения коэффициентов уравнения (1.3.11) определили значения функции Римана-Грина для всех точек области $\Omega\times\Omega$.

Лемма 1.3.1. Если выполняются условия (1.3.10), то функция Римана-Грина обладает такой симметрией, что

$$R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1) = R(-\eta,-\xi;-\eta_1,-\xi_1),\ (\xi,\eta)\in\widetilde{\Omega},\ (\xi_1,\eta_1)\in\widetilde{\Omega}. \qquad (2.3.16)$$

Доказательство Обозначим

$$R_1(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1) = R(-\eta,-\xi;-\eta_1,-\xi_1), \qquad (\xi,\eta)\in\widetilde{\Omega}, \qquad (\xi_1,\eta_1)\in\widetilde{\Omega}.$$

Покажем, что $R_1(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)$ удовлетворяет уравнению (1.3.12) и условиям (1.3.13)-(1.3.15). Действительно, подставляя представление $R_1(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)$ в уравнение (1.3.12), сначала вводим новое обозначение $-\xi_1 = \eta_2, -\eta_1 = \xi_2$, а затем также вводим новые символы:

$$-\eta = \tilde{\xi}, \quad -\xi = \tilde{\eta}, \quad \xi_2 = \widetilde{\xi_1}, \quad \eta_2 = \widetilde{\eta_1}$$

и снова используя условия (1.3.10), получим:

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi_1\partial\eta_1}R(-\eta,-\xi;-\eta_1,-\xi_1) - \frac{\partial}{\partial\xi_1}\big(A(\xi_1,\eta_1)R(-\eta,-\xi;-\eta_1,-\xi_1)\big) -$$

$$-\frac{\partial}{\partial\eta_1}(B(\xi_1,\eta_1)R(-\eta,-\xi;-\eta_1,-\xi_1)) + C(\xi_1,\eta_1)R(-\eta,-\xi;-\eta_1,-\xi_1) =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial\xi_2\partial\eta_2}R(-\eta,-\xi;\xi_2,\eta_2) + \frac{\partial}{\partial\eta_2}\big(A(-\eta_2,-\xi_2)R(-\eta,-\xi;\xi_2,\eta_2)\big) +$$

$$+\frac{\partial}{\partial\xi_2}(B(-\eta_2,-\xi_2)R(-\eta,-\xi;\xi_2,\eta_2)) + C(-\eta_2,-\xi_2)\cdot R(-\eta,-\xi;\xi_2,\eta_2) =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial\widetilde{\xi_1}\partial\widetilde{\eta_1}}R\big(\tilde{\xi},\tilde{\eta};\widetilde{\xi_1},\widetilde{\eta_1}\big) - \frac{\partial}{\partial\widetilde{\eta_1}}\Big(B\big(\widetilde{\xi_1},\widetilde{\eta_1}\big)R\big(\tilde{\xi},\tilde{\eta};\widetilde{\xi_1},\widetilde{\eta_1}\big)\Big) -$$

$$-\frac{\partial}{\partial\widetilde{\xi_1}}\left(A(\widetilde{\xi_1},\widetilde{\eta_1})R(\tilde{\xi},\tilde{\eta};\widetilde{\xi_1},\widetilde{\eta_1})\right)+C(\widetilde{\xi_1},\widetilde{\eta_1})\cdot R(\tilde{\xi},\tilde{\eta};\widetilde{\xi_1},\widetilde{\eta_1})=0. \qquad (1.3.17)$$

Таким образом, $R_1(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)$ удовлетворяет уравнению (1.3.12). Также подставляя представление $R_1(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)$ в условия (1.3.13)-(1.3.15) и используя все обозначения введенное на верху, имеем:

$$-\frac{\partial R(-\eta,-\xi;-\eta_1,-\xi_1)}{\partial\xi_1}-A(\xi_1,\eta_1)\cdot R(-\eta,-\xi;-\eta_1,-\xi_1)=$$

$$=\frac{\partial R(\tilde{\xi},\tilde{\eta};\widetilde{\xi_1},\widetilde{\eta_1})}{\partial\widetilde{\xi_1}}-B(\widetilde{\xi_1},\tilde{\eta}_1)\cdot R(\tilde{\xi},\tilde{\eta};\widetilde{\xi_1},\widetilde{\eta_1})=0,\ \ \widetilde{\eta_1}=\tilde{\eta}; \qquad (1.3.18)$$

$$-\frac{\partial R(-\eta,-\xi;-\eta_1,-\xi_1)}{\partial\eta_1}-B(\xi_1,\eta_1)\cdot R(-\eta,-\xi;-\eta_1,-\xi_1)=$$

$$=\frac{\partial R(\tilde{\xi},\tilde{\eta};\widetilde{\xi_1},\widetilde{\eta_1})}{\partial\widetilde{\eta_1}}-A(\widetilde{\xi_1},\tilde{\eta}_1)\cdot R(\tilde{\xi},\tilde{\eta};\widetilde{\xi_1},\widetilde{\eta_1})=0,\ \ \widetilde{\xi_1}=\tilde{\xi}; \qquad (1.3.19)$$

$$R(-\eta,-\xi;-\eta,-\xi)=R(\tilde{\xi},\tilde{\eta};\tilde{\xi},\tilde{\eta})=1. \qquad (1.3.20)$$

В силу (1.3.17)-(1.3.20) видим, что функция $R(-\eta,-\xi;-\eta_1,-\xi_1)$ удовлетворяет тем же условиям, что и функция Римана-Грина уравнения (1.3.11). Хорошо известно, что функция Римана-Грина является решением задачи Гурса, которая имеет единственное решение. Отсюда следует, что равенство (1.3.16) выполняется.

Следствие 1.3.2. На прямой $\xi=-\eta,\ \eta\le 0$, выполняется следующее равенство:

$$R(-\eta,\eta;\xi_1,\eta_1)=R(-\eta,\eta;-\eta_1,-\xi_1). \qquad (1.3.21)$$

1.4 О функции Грина

Определим функцию Грина первой начально-краевой задачи в четверти плоскости:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\xi\partial\eta}+A(\xi,\eta)\cdot\frac{\partial U}{\partial\xi}+B(\xi,\eta)\cdot\frac{\partial U}{\partial\eta}+C(\xi,\eta)\cdot U=F,(\xi,\eta)\in\Omega, \qquad (1.4.1)$$

$$U(\xi,\xi)=T_1(\xi),\left(\frac{\partial U}{\partial\xi}-\frac{\partial U}{\partial\eta}\right)(\xi,\xi)=M_1(\xi),\xi>0, \qquad (1.4.2)$$

$$U(-\eta,\eta)=P(\eta),\eta\le 0. \qquad (1.4.3)$$

Определение 1.4.1. Функцией Грина задачи (1.4.1)-(1.4.3) является функция $G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)$, которая для каждого фиксированного $(\xi_1,\eta_1)\in\Omega$ удовлетворяет однородному уравнению:

$$L_{(\xi,\eta)}G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)=0,(\xi,\eta)\in\Omega,\text{at}\,\xi\neq\xi_1,\ \eta\neq\eta_1,\ \eta\neq-\xi_1; \qquad (1.4.4)$$

и следующим граничным условиям:

$$G(\xi,\xi;\xi_1,\eta_1)=0,\xi\geq 0,(\xi_1,\eta_1)\in\Omega; \qquad (1.4.5)$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial\xi}-\frac{\partial G}{\partial\eta}\right)(\xi,\xi;\xi_1,\eta_1)=0,\xi\geq 0,(\xi_1,\eta_1)\in\Omega,\text{при}\,\xi\neq\xi_1,\ \eta\neq\eta_1; \qquad (1.4.6)$$

$$G(-\eta,\eta;\xi_1,\eta_1)=0,\eta\leq 0,(\xi_1,\eta_1)\in\Omega, \qquad (1.4.7)$$

и условиям на характеристиках:

$$\frac{\partial G(\xi_1+0,\eta;\xi_1,\eta_1)}{\partial\eta}+A(\xi_1,\eta)G(\xi_1+0,\eta;\xi_1,\eta_1)=$$

$$=\frac{\partial G(\xi_1-0,\eta;\xi_1,\eta_1)}{\partial\eta}+A(\xi_1,\eta)G(\xi_1-0,\eta;\xi_1,\eta_1),\text{при}\ \eta\neq\eta_1; \qquad (1.4.8)$$

$$\frac{\partial G(\xi,\eta_1+0;\xi_1,\eta_1)}{\partial\xi}+B(\xi,\eta_1)G(\xi,\eta_1+0;\xi_1,\eta_1)=$$

$$=\frac{\partial G(\xi,\eta_1-0;\xi_1,\eta_1)}{\partial\xi}+B(\xi,\eta_1)G(\xi,\eta_1-0;\xi_1,\eta_1),\text{при}\ \xi\neq\xi_1; \qquad (1.4.9)$$

$$\frac{\partial G(\xi,-\xi_1+0;\xi_1,\eta_1)}{\partial\xi}+B(\xi,-\xi_1)G(\xi,-\xi_1+0;\xi_1,\eta_1)=$$

$$=\frac{\partial G(\xi,-\xi_1-0;\xi_1,\eta_1)}{\partial\xi}+B(\xi,-\xi_1)G(\xi,-\xi_1-0;\xi_1,\eta_1); \qquad (1.4.10)$$

и при $(\xi,\eta)=(\xi_1,\eta_1)$ должно выпонятся следующее условие

$$G(\xi_1-0,\eta_1-0;\xi_1,\eta_1)-G(\xi_1+0,\eta_1-0;\xi_1,\eta_1)+$$

$$+G(\xi_1+0,\eta_1+0;\xi_1,\eta_1)-G(\xi_1-0,\eta_1+0;\xi_1,\eta_1)=1. \qquad (1.4.11)$$

1.5 Существование и единственность функции Грина задачи

Теорема 1.5.1 Функция $G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)$, удовлетворяющая условиям (1.4.4)-(1.4.11), существует и единственно.

Доказательство. Чтобы показать, что функция $G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)$, удовлетворяющая условиям (1.4.4)-(1.4.11), существует и единственна, мы разделим область Ω на несколько подобластей и последовательно рассмотрим следующие задачи. Пусть (ξ_1,η_1) - произвольная точка области Ω. Рассмотрим случай $\eta_1 > 0$, случай $\eta_1 < 0$ рассматривается аналогично (рисунок 1).

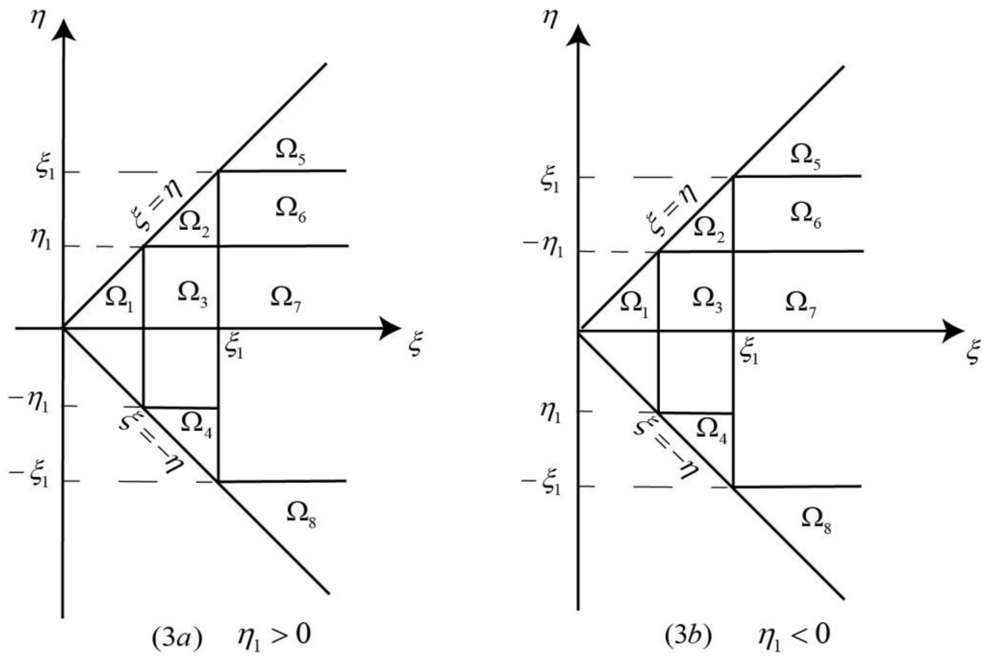

Рисунок 1 – (3a) - разделение Ω, при $\eta_1 > 0$; (3b) – разделение Ω, при $\eta_1 < 0$

В области $\Omega_1 = \{(\xi,\eta): 0 < \xi < \eta_1, -\xi < \eta < \xi\}$ рассмотрим задачу

$$L_{(\xi,\eta)}G = 0, (\xi,\eta) \in \Omega_1; \tag{1.5.1}$$

$$G(\xi,\xi;\xi_1,\eta_1) = 0, \xi \geq 0; \tag{1.5.2}$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial \xi} - \frac{\partial G}{\partial \eta}\right)(\xi,\xi;\xi_1,\eta_1) = 0, \xi \geq 0; \tag{1.5.3}$$

$$G(-\eta,\eta;\xi_1,\eta_1) = 0, \eta \leq 0. \tag{1.5.4}$$

Задача (1.5.1)-(1.5.4) является задачей Коши-Дирихле и имеет единственное решение:

$$G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1) \equiv 0, (\xi,\eta) \in \Omega_1. \tag{1.5.5}$$

В области $\Omega_2 = \{(\xi,\eta): \eta_1 < \xi < \xi_1, \eta_1 < \eta < \xi\}$ рассмотрим задачу

$$L_{(\xi,\eta)}G = 0, (\xi,\eta) \in \Omega_2; \tag{1.5.6}$$

$$G(\xi,\xi;\xi_1,\eta_1) = 0, \xi \geq 0; \tag{1.5.7}$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial \xi} - \frac{\partial G}{\partial \eta}\right)(\xi,\xi;\xi_1,\eta_1) = 0, \xi \geq 0. \tag{1.5.8}$$

Задача (1.5.6)-(1.5.8) является задачей Коши и имеет единственное решение:

$$G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1) \equiv 0, (\xi,\eta) \in \Omega_2. \tag{1.5.9}$$

Следовательно из (1.4.9), (1.5.5), (1.5.9) в области $\Omega_3 = \{(\xi,\eta): \eta_1 < \xi < \xi_1, -\eta_1 < \eta < \eta_1\}$ получим задачу:

$$L_{(\xi,\eta)}G = 0, (\xi,\eta) \in \Omega_3; \tag{1.5.10}$$

$$G(\eta_1,\eta;\xi_1,\eta_1) = 0, -\eta_1 \leq \eta \leq \eta_1; \tag{1.5.11}$$

$$\frac{\partial G(\xi,\eta_1-0;\xi_1,\eta_1)}{\partial \xi} + B(\xi,\eta_1) \cdot G(\xi,\eta_1-0;\xi_1,\eta_1) = 0, \eta_1 < \xi < \xi_1. \tag{1.5.12}$$

Интегрируя (1.5.12) по ξ имеем:

$$G(\xi,\eta_1-0;\xi_1,\eta_1) = \exp\left(-\int_{\eta_1}^{\xi} B(t,\eta_1)dt\right) C_1(\xi_1,\eta_1), \eta_1 < \xi < \xi_1. \tag{1.5.13}$$

Подставляя $\xi = \eta_1 - 0$ в (1.5.13), используя условие (1.4.5) имеем, что $C_1(\xi_1,\eta_1) \equiv 0$ и

$$G(\xi,\eta_1-0;\xi_1,\eta_1) = 0, \eta_1 \leq \xi \leq \xi_1. \tag{1.5.14}$$

Следовательно, задача (1.5.10)-(1.5.12) эквивалентна задаче (1.5.10), (1.5.11), (1.5.14), что является задачей Гурса и имеет единственное решение:

$$G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1) \equiv 0, (\xi,\eta) \in \Omega_3. \tag{1.5.15}$$

Поскольку функция Грина непрерывна для $\eta = -\eta_1$, то из (1.5.15) в области $\Omega_4 = \{(\xi,\eta): \eta_1 < \xi < \xi_1, -\xi < \eta < -\eta_1\}$ получим задачу:

$$L_{(\xi,\eta)}G = 0, (\xi,\eta) \in \Omega_4; \tag{1.5.16}$$

$$G(-\eta,\eta;\xi_1,\eta_1) = 0, \eta \leq 0; \tag{1.5.17}$$

$$G(\xi,-\eta_1;\xi_1,\eta_1) = 0, \eta_1 \leq \xi \leq \xi_1. \tag{1.5.18}$$

Задача (1.5.16)-(1.5.18) является задачей Дарбу и имеет единственное решение:

$$G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1) \equiv 0, (\xi,\eta) \in \Omega_4. \quad (1.5.19)$$

В области $\Omega_5 = \{(\xi,\eta): \xi_1 < \xi, \eta > \xi_1\}$ рассматривается задача Коши:

$$L_{(\xi,\eta)}G = 0, (\xi,\eta) \in \Omega_5; \quad (1.5.20)$$

$$G(\xi,\xi;\xi_1,\eta_1) = 0, \xi \geq 0; \quad (1.5.21)$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial \xi} - \frac{\partial G}{\partial \eta}\right)(\xi,\xi;\xi_1,\eta_1) = 0, \xi \geq 0, \quad (1.5.22)$$

который имеет единственное решение:

$$G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1) \equiv 0, (\xi,\eta) \in \Omega_5. \quad (1.5.23)$$

Тем самым из (1.4.8), (1.5.9), (1.5.23) в области $\Omega_6 = \{(\xi,\eta): \xi_1 < \xi, \eta_1 < \eta < \xi_1\}$ получим задачу:

$$L_{(\xi,\eta)}G = 0, (\xi,\eta) \in \Omega_6; \quad (1.5.24)$$

$$G(\xi,\xi_1;\xi_1,\eta_1) = 0,\ \xi \geq \xi_1; \quad (1.5.25)$$

$$\frac{\partial G(\xi_1+0,\eta;\xi_1,\eta_1)}{\partial \eta} + A(\xi_1,\eta)G(\xi_1+0,\eta;\xi_1,\eta_1) = 0, \eta_1 < \eta < \xi_1. \quad (1.5.26)$$

Интегрируя (1.5.26) по η получим:

$$G(\xi_1+0,\eta;\xi_1,\eta_1) = \exp\left(-\int_{\eta_1}^{\eta} A(\xi_1,t)dt\right) C_2(\xi_1,\eta_1), \eta_1 < \eta < \xi_1. \quad (1.5.27)$$

Подставляя $\eta = \xi_1 + 0$ в (1.5.27), используя условие (1.4.5) имеем, что $C_2(\xi_1,\eta_1) \equiv 0$ и

$$G(\xi_1+0,\eta;\xi_1,\eta_1) = 0, \eta_1 \leq \eta \leq \xi_1. \quad (1.5.28)$$

Следовательно, задача (1.5.24)-(1.5.26) эквивалентна задаче (1.5.24), (1.5.25), (1.5.28), что является задачей Гурса и имеет единственное решение:

$$G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1) \equiv 0, (\xi,\eta) \in \Omega_6. \quad (1.5.29)$$

Из (1.4.8), (1.4.9), (1.4.11), (1.5.15), (1.5.19), (1.5.29) в области $\Omega_7 = \{(\xi,\eta): \xi_1 < \xi, -\xi_1 < \eta < \eta_1\}$ получим задачу

$$L_{(\xi,\eta)}G = 0, (\xi,\eta) \in \Omega_7; \quad (1.5.30)$$

$$\frac{\partial G(\xi_1+0,\eta;\xi_1,\eta_1)}{\partial \eta} + A(\xi_1,\eta)G(\xi_1+0,\eta;\xi_1,\eta_1) = 0, -\xi_1 < \eta < \eta_1. \quad (1.5.31)$$

$$\frac{\partial G(\xi,\eta_1-0;\xi_1,\eta_1)}{\partial \xi} + B(\xi,\eta_1)G(\xi,\eta_1-0;\xi_1,\eta_1) = 0, \xi_1 < \xi. \quad (1.5.32)$$

$$G(\xi_1+0,\eta_1-0;\xi_1,\eta_1) = -1. \quad (1.5.33)$$

Задача (1.5.30)-(1.5.33) это задача Гурса, имеет единственное решение. Следовательно, функция $G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)$ в области Ω_7 определена однозначно. Сравним условий (1.5.30)-(1.5.33) со следующими условиями:

$$L_{(\xi,\eta)}R = 0, (\xi,\eta) \in \widetilde{\Omega};$$

$$\frac{\partial R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)}{\partial \xi} + B(\xi,\eta) \cdot R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1) = 0, \text{при} \quad \eta = \eta_1;$$

$$\frac{\partial R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)}{\partial \eta} + A(\xi,\eta) \cdot R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1) = 0, \text{при} \quad \xi = \xi_1;$$

$$R(\xi_1,\eta_1;\xi_1,\eta_1) = 1,$$

которому удовлетворяет функция Римана-Грина, и легко получить следующее равенство:

$$G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1) = -R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1), (\xi,\eta) \in \Omega_7. \quad (1.5.34)$$

Следовательно, из (1.5.34) в области $\Omega_8 = \{(\xi,\eta): \xi_1 < \xi, -\xi < \eta < -\xi_1\}$ получим задачу:

$$L_{(\xi,\eta)}G = 0, (\xi,\eta) \in \Omega_8; \quad (1.5.35)$$

$$G(-\eta,\eta;\xi_1,\eta_1) = 0, \eta \le 0; \quad (1.5.36)$$

$$\frac{\partial G(\xi,-\xi_1-0;\xi_1,\eta_1)}{\partial \xi} + B(\xi,-\xi_1)G(\xi,-\xi_1-0;\xi_1,\eta_1) =$$

$$= -\frac{\partial R(\xi,-\xi_1;\xi_1,\eta_1)}{\partial \xi} - B(\xi,-\xi_1)R(\xi,-\xi_1-0;\xi_1,\eta_1), \xi_1 < \xi. \quad (1.5.37)$$

Задача (1.5.35)-(1.5.37) является задачей Дарбу и имеет единственное решение.

Таким образом, показали, что для любых $(\xi_1, \eta_1) \in \Omega$ и $(\xi, \eta) \in \Omega$ функция Грина, удовлетворяющая условиям (1.4.4)-(1.4.11), существует и единственна. Теорема доказана.

Следствие 1.5.2. В ходе доказательства существования функции Грина получили, что $G(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1) \equiv 0$ в областях Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4, Ω_5, Ω_6. То есть $G(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1) \equiv 0$, при $\xi_1 > \xi$.

1.6 Построение функции Грина

Как видно из доказательства теоремы 1.5.1, функция Грина $G(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1) = 0$ в областях Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4, Ω_5, Ω_6. И в области Ω_7 она совпадает с функцией Римана (1.5.34). Давайте найдем представление функции Грина в области Ω_8. Для построения функций Грина предполагаем, что коэффициенты уравнения (1.6.1) удовлетворяют условиям симметрии (1.3.10).

Пусть (ξ_1, η_1) - произвольная точка области Ω. Для того чтобы построить функцию Грина в области $\widetilde{\Omega}_8$, рассмотрим задачу:

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial \xi \partial \eta} + A(\xi, \eta)\frac{\partial G_1}{\partial \xi} + B(\xi, \eta)\frac{\partial G_1}{\partial \eta} + C(\xi, \eta) G_1 = 0, (\xi, \eta) \in \widetilde{\Omega}_8, \quad (1.6.1)$$

где $\widetilde{\Omega}_8 = \Omega_8 \cup \Omega_8^-$, $\Omega_8^- = \{(\xi, \eta): \xi_1 < \xi, \eta < -\xi\}$,

$$\frac{\partial G_1(\xi, -\xi_1 - 0; \xi_1, \eta_1)}{\partial \xi} + B(\xi, -\xi_1) G_1(\xi, -\xi_1 - 0; \xi_1, \eta_1) =$$

$$= -\frac{\partial R(\xi, -\xi_1; \xi_1, \eta_1)}{\partial \xi} - B(\xi, -\xi_1) R(\xi, -\xi_1; \xi_1, \eta_1), \xi_1 < \xi; \quad (1.6.2)$$

$$\frac{\partial G_1(\xi_1 + 0, \eta; \xi_1, \eta_1)}{\partial \eta} + A(\xi_1, \eta) G_1(\xi_1 + 0, \eta; \xi_1, \eta_1) =$$

$$= \frac{\partial R(-\eta, -\xi_1; \xi_1, \eta_1)}{\partial \eta} + A(\xi_1, \eta) R(-\eta, -\xi_1; \xi_1, \eta_1), \eta < -\xi_1; \quad (1.6.3)$$

$$G_1(\xi_1, -\xi_1; \xi_1, \eta_1) = 0. \quad (1.6.4)$$

Задача (1.6.1)-(1.6.4) – задача Гурса. Его решение существует и единственно. Нас интересует представление функции $G_1(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1)$.

Лемма 1.6.1. Если функция $G_1(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1)$ является решением задачи *(1.6.1)-(1.6.4),* то для любого $(\xi, \eta) \in \tilde{\Omega}_8$ имеем $G_1(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1) = -G_1(-\eta, -\xi; \xi_1, \eta_1)$.

Доказательство. Чтобы показать, что функция $-G_1(-\eta, -\xi; \xi_1, \eta_1)$ удовлетворяет уравнению (1.6.1), в (1.6.1) замену $\xi = -\eta_2, \eta = -\xi_2$, $(-\eta_2, -\xi_2) \in \Omega_8^-$ а после, используя условия (1.3.6)-(1.3.8), получим, что $-G_1(-\eta, -\xi; \xi_1, \eta_1)$ удовлетворяет уравнению (1.6.1).

Также делая замену $\xi = -\eta_2, \eta_2 < -\xi_1$ в (1.6.2) и используя условия (1.3.6), (1.3.7) получаем условие (1.6.3). Аналогично, заменив $-\eta = \xi_2, \eta < -\xi_1$ в (1.6.3) и используя условия (1.3.6), (1.3.7) получаем условие (1.6.2).

Таким образом, показано, что функция $-G_1(-\eta, -\xi; \xi_1, \eta_1)$ также является решением задачи (1.6.1)-(1.6.4). Поскольку решение задачи (1.6.1)-(1.6.4) единственно, тогда

$$G_1(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1) = -G_1(-\eta, -\xi; \xi_1, \eta_1), \qquad (\xi, \eta) \in \widetilde{\Omega}_8.$$

Ищем решение задачи (1.6.1)-(1.6.4) в следующем виде:

$$G_1(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1) = g(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1) - R(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1), (\xi, \eta) \in \widetilde{\Omega}_8.$$

Тогда для функции $g(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1)$ получим следующую задачу:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \xi \partial \eta} + A(\xi, \eta)\frac{\partial g}{\partial \xi} + B(\xi, \eta)\frac{\partial g}{\partial \eta} + C(\xi, \eta) g = 0, (\xi, \eta) \in \widetilde{\Omega}_8; \qquad (1.6.5)$$

$$\frac{\partial g(\xi, -\xi_1; \xi_1, \eta_1)}{\partial \xi} + B(\xi, -\xi_1) g(\xi, -\xi_1; \xi_1, \eta_1) = 0, \xi_1 < \xi; \qquad (1.6.6)$$

$$\frac{\partial g(\xi_1, \eta; \xi_1, \eta_1)}{\partial \eta} + A(\xi_1, \eta) g(\xi_1, \eta; \xi_1, \eta_1) =$$

$$= \frac{\partial R(-\eta, -\xi_1; \xi_1, \eta_1)}{\partial \eta} + A(\xi_1, \eta) R(-\eta, -\xi_1; \xi_1, \eta_1), \eta < -\xi_1; \qquad (1.6.7)$$

$$g(\xi_1, -\xi_1; \xi_1, \eta_1) = R(\xi_1, -\xi_1; \xi_1, \eta_1). \qquad (1.6.8)$$

Легко видеть, что решение задачи (1.6.5)-(1.6.8) имеет вид

$$g(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1) = R(-\eta, -\xi; \xi_1, \eta_1), (\xi, \eta) \in \widetilde{\Omega}_8. \qquad (1.6.9)$$

Тогда из (1.6.9) получим

$$G_1(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1) = R(-\eta, -\xi; \xi_1, \eta_1) - R(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1), (\xi, \eta) \in \widetilde{\Omega}_8. \; (1.6.10)$$

Таким образом, доказана следующая теорема:

Теорема 1.6.2. Функция Грина задачи (1.4.1)-(1.4.3) существует и единственно. Эта функция Грина может быть выражена с помощью функции Римана-Грина:

$$G(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1) \equiv 0, \qquad \text{при } (\xi, \eta) \in \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4, \Omega_5, \Omega_6;$$

$$G(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1) = -R(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1), \quad \text{при } (\xi, \eta) \in \Omega_7;$$

$$G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1) = R(-\eta,-\xi;\xi_1,\eta_1) - R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1), \qquad \text{if } (\xi,\eta) \in \Omega_8.$$

Лемма 1.6.3. Пусть (ξ,η) произвольная точка области Ω. По внутренним переменным (ξ_1,η_1) функция Грина задачи (1.4.1)-(1.4.3) обладает следующими свойствами:

$$L^*_{(\xi_1,\eta_1)} G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1) = 0, (\xi_1,\eta_1) \in \Omega,$$

$$\text{при } \xi_1 \neq \xi,\ \eta_1 \neq \eta,\ \xi_1 \neq -\eta; \tag{1.6.11}$$

$$G(\xi,\eta;\xi_1,-\xi_1) = 0,\ \xi_1 < -\eta; \tag{1.6.12}$$

$$\frac{\partial G(\xi,\eta;\xi-0,\eta_1)}{\partial \eta_1} - A(\xi,\eta_1) G(\xi,\eta;\xi-0,\eta_1) = 0, \text{при } \eta_1 \neq \eta; \tag{1.6.13}$$

$$\frac{\partial G(\xi,\eta;\xi_1,\eta+0)}{\partial \xi_1} - B(\xi_1,\eta) G(\xi,\eta;\xi_1,\eta+0) = 0, \text{при } \xi_1 \neq \xi; \tag{1.6.14}$$

$$\frac{\partial G(\xi,\eta;-\eta-0,\eta_1)}{\partial \xi_1} - B(-\eta,\eta_1)\ G(\xi,\eta;-\eta-0,\eta_1)$$

$$= \frac{\partial G(\xi,\eta;-\eta+0,\eta_1)}{\partial \xi_1} - B(-\eta,\eta_1) G(\xi,\eta;-\eta+0,\eta_1); \tag{1.6.15}$$

$$G(\xi,\eta;\xi-0,\eta-0) - G(\xi,\eta;\xi+0,\eta-0) +$$

$$+G(\xi,\eta;\xi+0,\eta+0) - G(\xi,\eta;\xi-0,\eta+0) = 1. \tag{1.6.16}$$

Доказательство Свойства (1.6.11)-(1.6.16) могут быть легко получены из построения функции Грина задачи (1.4.1)-(1.4.3). Из (1.6.11)-(1.6.16) можно однозначно восстановить функцию Грина задачи (1.4.1)-(1.4.3).

Используя свойства (1.6.11)-(1.6.16), мы можем использовать его для написания интегрального представления решения задачи (1.4.1)-(1.4.3). Для этого рассмотрим следующий интеграл:

$$\iint_{\Omega_{(\xi\eta)}} G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1) F(\xi_1,\eta_1) d\xi_1 d\eta_1 =$$

$$= \iint_{\Omega_{(\xi\eta)}} G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1) \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi_1 \partial \eta_1} + A \frac{\partial U}{\partial \xi_1} + B \frac{\partial U}{\partial \eta_1} + CU \right) d\xi_1 d\eta_1. \tag{1.6.17}$$

Применив теорему Грина на плоскости [27] и используя начальные условия (1.4.2), свойства функции Грина (1.6.11)-(1.6.16), из (1.6.17) получим следующее представление решения задачи (1.4.1)-(1.4.3) в области $\Omega_{(\xi\eta)}$ (рисунок 2) при $\eta > 0$:

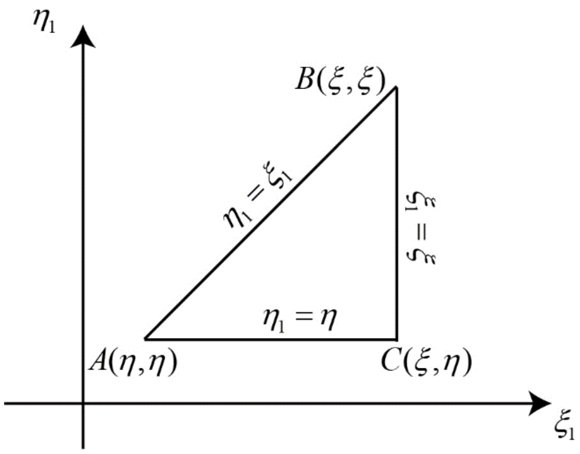

Рисунок 2 – Область $\Omega_{(\xi\eta)}$, при $\eta > 0$

$$U(\xi,\eta) = -\frac{1}{2}G(\xi,\eta;\eta,\eta)T_1(\eta) - \frac{1}{2}G(\xi,\eta;\xi,\xi)T_1(\xi) -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\xi}^{\eta}\left(\frac{\partial G}{\partial N_1}(\xi,\eta;\xi_1,\xi_1) + 2(A-B)(\xi_1,\xi_1)G(\xi,\eta;\xi_1,\xi_1)\right)T_1(\xi_1)d\xi_1 +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\xi}^{\eta} G(\xi,\eta;\xi_1,\xi_1)M_1(\xi_1)d\xi_1 +$$

$$+\iint_{\Omega_{(\xi\eta)}} G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)F(\xi_1,\eta_1)d\xi_1 d\eta_1. \quad (1.6.18)$$

Также, при $\eta < 0$, применив теорему Грина на плоскости [27, p. 384-387] и используя начальные условия (1.4.2), граничное условие (1.4.3), свойства функции Грина (1.6.11)-(1.6.16), из (1.6.17) получим следующее представление решения задачи (1.4.1)-(1.4.3) в области $\Omega_{(\xi\eta)}$ (рисунок 3).

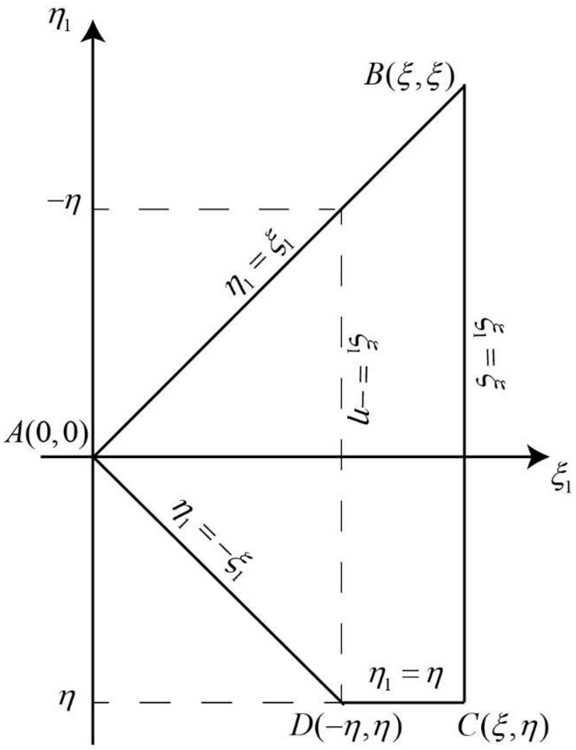

Рисунок 3 – Область $\Omega_{(\xi\eta)}$, при $\eta\ <\ 0$

$$U(\xi,\eta)=\frac{1}{2}\big(G(\xi,\eta;-\eta-0,\eta)-2G(\xi,\eta;-\eta+0,\eta)\big)P(\eta)-$$

$$-\frac{1}{2}\big(G(\xi,\eta;-\eta-0,-\eta-0)-G(\xi,\eta;-\eta+0,-\eta+0)\big)T_1(-\eta)-$$

$$-\frac{1}{2}G(\xi,\eta;\xi,\xi)T_1(\xi)+\frac{1}{2}\int_0^{-\eta}\frac{\partial G}{\partial N_1}(\xi,\eta;\xi_1,-\xi_1)P(-\xi_1)d\xi_1+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{\xi}\left(\frac{\partial G}{\partial N_1}(\xi,\eta;\xi_1,\xi_1)+2(A-B)(\xi_1,\xi_1)G(\xi,\eta;\xi_1,\xi_1)\right)T_1(\xi_1)d\xi_1-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{\xi}G(\xi,\eta;\xi_1,\xi_1)M_1(\xi_1)d\xi_1+\iint_{\Omega_{(\xi\eta)}}G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)F(\xi_1,\eta_1)d\xi_1. \qquad (1.6.19)$$

Легко видеть, что (1.6.18), (1.6.19) являются решениями задачи (1.4.1)-(1.4.3). Подставляя $U(\xi,\eta),\gamma(\eta),\mu(\xi)$ в (1.3.1) получим решение задачи (1.1.4)-(1.1.6).

В заключение хотели бы отметить, что у нас есть некоторый опыт в построении функций Грина для эллиптических задач [28-31]. Но, как мы узнали из этого исследования, гиперболическая функция Грина существенно отличается от функций Грина для эллиптических или параболических задач. В частности, функция Грина гиперболической задачи может иметь разрывы по нескольким характеристикам уравнения. Как мы видим, в связи с этим для каждой гиперболической задачи определение и обоснование функции Грина необходимо проводить отдельно и требуются детальные исследования в этом направлении.

Результаты в этом направлений дано в работе [32].

2 О ФУНКЦИИ ГРИНА ЗАДАЧИ КОШИ-НЕЙМАНА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ

2.1 Постановка задачи

Пусть $Q = \{(x,t): x > 0, t > 0\}$. Следующее гиперболическое уравнение рассматривается в Q:

$$Lu \quad \equiv \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + a_1(x,t) \cdot \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} +$$

$$+b_1(x,t) \cdot \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + c_1(x,t) \cdot u(x,t) = F(x,t), (x,t) \in Q, \qquad (2.1.1)$$

с начальными условиями:

$$u(x,0) = T(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = N(x),\ x > 0, \qquad (2.1.2)$$

и граничным условием:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \Phi(t),\ t > 0. \qquad (2.1.3)$$

В характеристических координатах $\xi = x + t,\ \eta = x - t$ уравнение (2.1.1) имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + a(\xi,\eta) \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi} + b(\xi,\eta) \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta} + c(\xi,\eta) \cdot u = f(\xi,\eta), \quad (\xi,\eta) \in \Omega, \quad (2.1.4)$$

и начальные условия (2.1.2) имеют вид

$$u(\xi,\xi) = \tau(\xi), \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)(\xi,\xi) = \nu(\xi),\ \xi > 0, \qquad (2.1.5)$$

и граничное условие (2.1.3) изменится на

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)(-\eta,\eta) = \varphi(\eta),\ \eta \le 0. \qquad (2.1.6)$$

Будем считать, что $a, b \in C^1(\overline{\Omega})$; $c,\ f \in C(\overline{\Omega})$; $\varphi\ \in C^1((-\infty,0])$; $\nu \in C^1([0,+\infty))$; $\tau \in C^1([0,+\infty))$; $\varphi'(0) = -\nu'(0),\ \varphi(0) = \tau'(0)$.

Цель состоит в том, чтобы построить функцию Грина и решение задачи (2.1.4)-(2.1.6).

2.2 О функции Грина

Определение 2.2.1 Функцией Грина задачи (2.1.4)-(2.1.6) является функция $G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)$, которая для каждого фиксированного $(\xi_1,\eta_1)\in\Omega$ удовлетворяет однородному уравнению:

$$L_{(\xi,\eta)}G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)=0,(\xi,\eta)\in\Omega,\ \text{при}\ \xi\neq\xi_1,\ \eta\neq\eta_1,\ \eta\neq-\xi_1; \quad (2.2.1)$$

и следующим граничным условиям:

$$G(\xi,\xi;\xi_1,\eta_1)=0,\xi\geq 0,(\xi_1,\eta_1)\in\Omega; \quad (2.2.2)$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial\xi}-\frac{\partial G}{\partial\eta}\right)(\xi,\xi;\xi_1,\eta_1)=0,\xi\geq 0,(\xi_1,\eta_1)\in\Omega,\text{at}\ \xi\neq\xi_1,\ \eta\neq\eta_1; \quad (2.2.3)$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial\xi}+\frac{\partial G}{\partial\eta}\right)(-\eta,\eta;\xi_1,\eta_1)=0,\eta\leq 0,(\xi_1,\eta_1)\in\Omega, \quad (2.2.4)$$

и условиям на характеристиках:

$$\frac{\partial G(\xi_1+0,\eta;\xi_1,\eta_1)}{\partial\eta}+a(\xi_1,\eta)G(\xi_1+0,\eta;\xi_1,\eta_1)=$$

$$=\frac{\partial G(\xi_1-0,\eta;\xi_1,\eta_1)}{\partial\eta}+a(\xi_1,\eta)G(\xi_1-0,\eta;\xi_1,\eta_1),\text{при}\ \eta\neq\eta_1; \quad (2.2.5)$$

$$\frac{\partial G(\xi,\eta_1+0;\xi_1,\eta_1)}{\partial\xi}+b(\xi,\eta_1)G(\xi,\eta_1+0;\xi_1,\eta_1)=$$

$$=\frac{\partial G(\xi,\eta_1-0;\xi_1,\eta_1)}{\partial\xi}+b(\xi,\eta_1)G(\xi,\eta_1-0;\xi_1,\eta_1),\text{при}\ \xi\neq\xi_1; \quad (2.2.6)$$

$$\frac{\partial G(\xi,-\xi_1+0;\xi_1,\eta_1)}{\partial\xi}+b(\xi,-\xi_1)G(\xi,-\xi_1+0;\xi_1,\eta_1)=$$

$$=\frac{\partial G(\xi,-\xi_1-0;\xi_1,\eta_1)}{\partial\xi}+b(\xi,-\xi_1)G(\xi,-\xi_1-0;\xi_1,\eta_1); \quad (2.2.7)$$

и при $(\xi,\eta)=(\xi_1,\eta_1)$ и $(\xi,\eta)=(\xi_1,-\xi_1)$ должно выпонятся следующее условие:

$$G(\xi_1-0,\eta_1-0;\xi_1,\eta_1)-G(\xi_1+0,\eta_1-0;\xi_1,\eta_1)+$$

$$+G(\xi_1+0,\eta_1+0;\xi_1,\eta_1)-G(\xi_1-0,\eta_1+0;\xi_1,\eta_1)=1; \quad (2.2.8)$$

$$G(\xi_1,-\xi_1-0;\xi_1,\eta_1)=2G(\xi_1,-\xi_1+0;\xi_1,\eta_1). \quad (2.2.9)$$

2.3 Существование и единственность функции Грина задачи

Теорема 2.3.1. Функция $G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)$, удовлетворяющая условиям (2.2.1)-(2.2.9), существует и единственно.

Доказательство. Чтобы показать, что функция $G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)$, удовлетворяющая условиям (2.2.1)-(2.2.9), существует и единственна, разделим область Ω на несколько подобластей и последовательно рассмотрим следующие задачи. Пусть (ξ_1,η_1) - произвольная точка области Ω. Рассмотрим случай $\eta_1 > 0$, случай $\eta_1 < 0$ рассматривается аналогично.

В области $\Omega_1 = \{(\xi,\eta): 0 < \xi < \eta_1, -\xi < \eta < \xi\}$ рассмотрим задачу:

$$L_{(\xi,\eta)}G = 0, (\xi,\eta) \in \Omega_1; \quad (2.3.1)$$

$$G(\xi,\xi;\xi_1,\eta_1) = 0, \xi \geq 0; \quad (2.3.2)$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial \xi} - \frac{\partial G}{\partial \eta}\right)(\xi,\xi;\xi_1,\eta_1) = 0, \xi \geq 0; \quad (2.3.3)$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial \xi} + \frac{\partial G}{\partial \eta}\right)(-\eta,\eta;\xi_1,\eta_1) = 0, \eta \leq 0. \quad (2.3.4)$$

Задача (2.3.1)-(2.3.4) является задачей Коши-Дирихле и имеет единственное решение

$$G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1) \equiv 0, (\xi,\eta) \in \Omega_1. \quad (2.3.5)$$

В области $\Omega_2 = \{(\xi,\eta): \eta_1 < \xi < \xi_1, \eta_1 < \eta < \xi\}$ рассмотрим задачу

$$L_{(\xi,\eta)}G = 0, (\xi,\eta) \in \Omega_2; \quad (2.3.6)$$

$$G(\xi,\xi;\xi_1,\eta_1) = 0, \xi \geq 0; \quad (2.3.7)$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial \xi} - \frac{\partial G}{\partial \eta}\right)(\xi,\xi;\xi_1,\eta_1) = 0, \xi \geq 0. \quad (2.3.8)$$

Задача (2.3.6)-(2.3.8) является задачей Коши и имеет единственное решение:

$$G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1) \equiv 0, (\xi,\eta) \in \Omega_2. \quad (2.3.9)$$

Следовательно из (2.2.5), (2.3.5), (2.3.9) в области $\Omega_3 = \{(\xi,\eta): \eta_1 < \xi < \xi_1, -\eta_1 < \eta < \eta_1\}$ получим задачу:

$$L_{(\xi,\eta)}G = 0, (\xi,\eta) \in \Omega_3; \quad (2.3.10)$$

$$G(\eta_1,\eta;\xi_1,\eta_1) = 0, -\eta_1 \leq \eta \leq \eta_1; \quad (2.3.11)$$

$$\frac{\partial G(\xi,\eta_1-0;\xi_1,\eta_1)}{\partial \xi}+b(\xi,\eta_1)\cdot G(\xi,\eta_1-0;\xi_1,\eta_1)=0,\eta_1<\xi<\xi_1. \qquad (2.3.12)$$

Интегрируя (2.3.12) по ξ имеем:

$$G(\xi,\eta_1-0;\xi_1,\eta_1)=\exp\left(-\int_{\eta_1}^{\xi} b(t,\eta_1)dt\right)C_1(\xi_1,\eta_1),\eta_1<\xi<\xi_1. \qquad (2.3.13)$$

Подставляя $\xi=\eta_1-0$ в (2.3.13), используя условие (2.2.2) имеем, что $C_1(\xi_1,\eta_1)\equiv 0$ и

$$G(\xi,\eta_1-0;\xi_1,\eta_1)=0,\eta_1\leq\xi\leq\xi_1. \qquad (2.3.14)$$

Следовательно, задача (2.3.10)-(2.3.12) эквивалентна задаче (2.3.10), (2.3.11), (2.3.14), что является задачей Гурса и имеет единственное решение

$$G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)\equiv 0,(\xi,\eta)\in\Omega_3. \qquad (2.3.15)$$

Поскольку функция Грина непрерывна для $\eta=-\eta_1$, то из (2.3.15) в области $\Omega_4=\{(\xi,\eta):\eta_1<\xi<\xi_1,-\xi<\eta<-\eta_1\}$ получим задачу

$$L_{(\xi,\eta)}G=0,(\xi,\eta)\in\Omega_4; \qquad (2.3.16)$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial \xi}+\frac{\partial G}{\partial \eta}\right)(-\eta,\eta;\xi_1,\eta_1)=0,\eta\leq 0; \qquad (2.3.17)$$

$$G(\xi,-\eta_1;\xi_1,\eta_1)=0,\eta_1\leq\xi\leq\xi_1. \qquad (2.3.18)$$

Задача (2.3.16)-(2.3.18) является задачей Дарбу и имеет единственное решение

$$G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)\equiv 0,(\xi,\eta)\in\Omega_4. \qquad (2.3.19)$$

В области $\Omega_5=\{(\xi,\eta):\xi_1<\xi,\eta>\xi_1\}$ рассматривается задача Коши

$$L_{(\xi,\eta)}G=0,(\xi,\eta)\in\Omega_5; \qquad (2.3.20)$$

$$G(\xi,\xi;\xi_1,\eta_1)=0,\xi\geq 0; \qquad (2.3.21)$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial \xi}-\frac{\partial G}{\partial \eta}\right)(\xi,\xi;\xi_1,\eta_1)=0,\xi\geq 0, \qquad (2.3.22)$$

который имеет единственное решение:

$$G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)\equiv 0,(\xi,\eta)\in\Omega_5. \tag{2.3.23}$$

Тем самым из (2.2.4), (2.3.9), (2.3.23) в области $\Omega_6=\{(\xi,\eta):\xi_1<\xi,\eta_1<\eta<\xi_1\}$ получим задачу:

$$L_{(\xi,\eta)}G=0,(\xi,\eta)\in\Omega_6; \tag{2.3.24}$$

$$G(\xi,\xi_1;\xi_1,\eta_1)=0,\ \xi\geq\xi_1; \tag{2.3.25}$$

$$\frac{\partial G(\xi_1+0,\eta;\xi_1,\eta_1)}{\partial\eta}+a(\xi_1,\eta)G(\xi_1+0,\eta;\xi_1,\eta_1)=0,\eta_1<\eta<\xi_1. \tag{2.3.26}$$

Интегрируя (2.3.26) по η получим:

$$G(\xi_1+0,\eta;\xi_1,\eta_1)=\exp\left(-\int_{\eta_1}^{\eta}a(\xi_1,t)dt\right)C_2(\xi_1,\eta_1),\eta_1<\eta<\xi_1. \tag{2.3.27}$$

Подставляя $\eta=\xi_1+0$ в (2.3.27), используя условие (1.4.5) имеем, что $C_2(\xi_1,\eta_1)\equiv 0$ и

$$G(\xi_1+0,\eta;\xi_1,\eta_1)=0,\eta_1\leq\eta\leq\xi_1. \tag{2.3.28}$$

Следовательно, задача (2.3.24)-(2.3.26) эквивалентна задаче (2.3.24), (2.3.25), (2.3.28), что является задачей Гурса и имеет единственное решение

$$G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)\equiv 0,(\xi,\eta)\in\Omega_6. \tag{2.3.29}$$

Из (2.2.4), (2.2.5), (2.2.7), (2.3.15), (2.3.19), (2.3.29) в области $\Omega_7=\{(\xi,\eta):\xi_1<\xi,-\xi_1<\eta<\eta_1\}$ получим задачу:

$$L_{(\xi,\eta)}G=0,(\xi,\eta)\in\Omega_7; \tag{2.3.30}$$

$$\frac{\partial G(\xi_1+0,\eta;\xi_1,\eta_1)}{\partial\eta}+a(\xi_1,\eta)G(\xi_1+0,\eta;\xi_1,\eta_1)=0,-\xi_1<\eta<\eta_1. \tag{2.3.31}$$

$$\frac{\partial G(\xi,\eta_1-0;\xi_1,\eta_1)}{\partial\xi}+b(\xi,\eta_1)G(\xi,\eta_1-0;\xi_1,\eta_1)=0,\xi_1<\xi. \tag{2.3.32}$$

$$G(\xi_1+0,\eta_1-0;\xi_1,\eta_1)=-1. \tag{2.3.33}$$

Задача (2.3.30)-(2.3.33) – это задача Гурса, имеет единственное решение. Следовательно, функция $G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)$ в области Ω_7 определена однозначно. Сравним условий (2.3.30)-(2.3.33) со следующими условиями:

$$L_{(\xi,\eta)}R=0,(\xi,\eta)\in\widetilde{\Omega};$$

$$\frac{\partial R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)}{\partial \xi}+b(\xi,\eta)\cdot R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)=0,\text{при}\quad \eta=\eta_1;$$
$$\frac{\partial R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)}{\partial \eta}+a(\xi,\eta)\cdot R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)=0,\text{при}\quad \xi=\xi_1;$$

$$R(\xi_1,\eta_1;\xi_1,\eta_1)=1,$$

которому удовлетворяет функция Римана-Грина, легко получить следующее равенство

$$G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)=-R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1),(\xi,\eta)\in\Omega_7. \qquad (2.3.34)$$

Следовательно, из (3.3.34) в области $\Omega_8=\{(\xi,\eta):\xi_1<\xi,-\xi<\eta<-\xi_1\}$ получим задачу:

$$L_{(\xi,\eta)}G=0,(\xi,\eta)\in\Omega_8; \qquad (2.3.35)$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial \xi}+\frac{\partial G}{\partial \eta}\right)(-\eta,\eta;\xi_1,\eta_1)=0,\eta\le 0; \qquad (2.3.36)$$

$$\frac{\partial G(\xi,-\xi_1-0;\xi_1,\eta_1)}{\partial \xi}+b(\xi,-\xi_1)G(\xi,-\xi_1-0;\xi_1,\eta_1)=$$

$$=-\frac{\partial R(\xi,-\xi_1;\xi_1,\eta_1)}{\partial \xi}-b(\xi,-\xi_1)R(\xi,-\xi_1-0;\xi_1,\eta_1),\xi_1<\xi. \qquad (2.3.37)$$

Перепишем условие (2.3.37) в следующем виде:

$$\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(G(\xi,-\xi_1-0;\xi_1,\eta_1)\exp\left(\int_{\xi_1}^{\xi} b(t,-\xi_1)dt\right)\right)\right]\exp\left(\int_{\xi}^{\xi_1} b(t,-\xi_1)dt\right)=$$

$$=\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(-R(\xi,-\xi_1;\xi_1,\eta_1)\exp\left(\int_{\xi_1}^{\xi} b(t,-\xi_1)dt\right)\right)\right]\exp\left(\int_{\xi}^{\xi_1} b(t,-\xi_1)dt\right). \qquad (2.3.38)$$

Интегрируя (2.3.38) по ξ получим

$$G(\xi,-\xi_1-0;\xi_1,\eta_1)=-R(\xi,-\xi_1;\xi_1,\eta_1)+$$

$$+C(\xi_1,\eta_1)\exp\left(\int_{\xi}^{\xi_1} b(t,-\xi_1)dt\right). \qquad (2.3.39)$$

Используя (2.3.39) получим, что

$$C(\xi_1,\eta_1) = -R(\xi_1,-\xi_1;\xi_1,\eta_1) = \exp\left(\int_{-\xi_1}^{\eta_1} a(\xi_1,t)dt\right). \qquad (2.3.40)$$

Подставляя (2.3.40) в (2.3.39) и используя условие (2.2.8) имеем

$$G(\xi,-\xi_1-0;\xi_1,\eta_1) =$$

$$= -R(\xi,-\xi_1;\xi_1,\eta_1) - \exp\left(\int_{\xi}^{-\eta_1} b(t,-\xi_1)dt\right),\ \xi > \xi_1. \qquad (2.3.41)$$

Задача (2.3.35), (2.3.35), (2.3.41) является задачей Дарбу и имеет единственное решение.

Таким образом показано, что для любых $(\xi_1,\eta_1) \in \Omega$ и $(\xi,\eta) \in \Omega$ функция Грина, удовлетворяющая условиям (2.2.1)-(2.2.9), существует и единственна. Теорема доказана.

Следствие 2.3.2 В ходе доказательства существования функции Грина получили, что $G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1) \equiv 0$ в областях Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4, Ω_5, Ω_6. То есть $G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1) \equiv 0$, при $\xi_1 > \xi$.

2.4 Построение функции Грина

Как видно из доказательства теоремы (2.3.1), функция Грина $G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1) = 0$ в областях Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4, Ω_5, Ω_6. В области Ω_7 она совпадает с функцией Римана. Найдем представление функции Грина в области Ω_8.

Пусть (ξ_1,η_1) - произвольная точка области Ω. Для того чтобы построить функцию Грина в области $\widetilde{\Omega}_8$, рассмотрим задачу:

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial\xi\partial\eta} + A(\xi,\eta)\frac{\partial G_1}{\partial\xi} + B(\xi,\eta)\frac{\partial G_1}{\partial\eta} + C(\xi,\eta)G_1 = 0, (\xi,\eta) \in \widetilde{\Omega}_8, \qquad (2.4.1)$$

$$G(\xi,-\xi_1-0;\xi_1,\eta_1) =$$

$$= -R(\xi,-\xi_1;\xi_1,\eta_1) - \exp\left(\int_{\xi}^{-\eta_1} B(t,-\xi_1)dt\right),\ \xi_1 < \xi; \qquad (2.4.2)$$

$$G(\xi_1+0,\eta;\xi_1,\eta_1) =$$

$$= -R(-\eta,-\xi_1;\xi_1,\eta_1) - \exp\left(\int_{\eta}^{\eta_1} B(t,-\xi_1)dt\right),\ \eta < -\xi_1; \qquad (2.4.3)$$

$$G_1(\xi_1,-\xi_1-0;\xi_1,\eta_1) = -2R(\xi_1,-\xi_1;\xi_1,\eta_1), \qquad (2.4.4)$$

где $\widetilde{\Omega}_8 = \Omega_8 \cup \Omega_8^-$, $\Omega_8^- = \{(\xi,\eta): \xi_1 < \xi, \eta < -\xi\}$, $A(\xi,\eta), B(\xi,\eta), C(\xi,\eta)$- определена в (1.3.6)-(1.3.8), имеет гладкость (1.3.9), удовлетворяет условиям (1.3.10).

Задача (2.4.1)-(2.4.4) задача Гурса. Его решение существует и единственна. Нас интересует представление функции $G_1(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)$.

Лемма 2.4.1. Если функция $G_1(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)$ является решением задачи (2.4.1)-(2.4.4), то для любого $(\xi,\eta)\in\widetilde{\Omega}_8$ имеем $G_1(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)=G_1(-\eta,-\xi;\xi_1,\eta_1)$.

Доказательство. Чтобы показать, что функция $-G_1(-\eta,-\xi;\xi_1,\eta_1)$ удовлетворяет уравнению (2.4.1), в (2.4.1) замену $\xi=-\eta_2,\eta=-\xi_2$, $(-\eta_2,-\xi_2)\in\Omega_8^-$ а после, используя условия (1.3.6)-(1.3.8), получим, что $-G_1(-\eta,-\xi;\xi_1,\eta_1)$ удовлетворяет уравнению (2.4.1).

Также делая замену $\xi=-\eta_2,\eta_2<-\xi_1$ в (2.4.2) и используя условия (1.3.6), (2.3.7) получаем условие (2.4.3). Аналогично, заменив $-\eta=\xi_2,\eta<-\xi_1$ в (2.4.3) и используя условия (1.3.6), (1.3.7) получаем условие (2.4.2).

Таким образом доказано, что функция $G_1(-\eta,-\xi;\xi_1,\eta_1)$ также является решением задачи (2.4.1)-(2.4.4). Поскольку решение задачи (2.4.1)-(2.4.4) единственно, тогда

$$G_1(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)=G_1(-\eta,-\xi;\xi_1,\eta_1),\qquad(\xi,\eta)\in\widetilde{\Omega}_8.$$

Ищем решение задачи (2.4.1)-(2.4.4) в следующем виде:

$$G_1(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)=g(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)-R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1),(\xi,\eta)\in\widetilde{\Omega}_8.$$

Тогда для функции $g(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)$ получим следующую задачу:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial\xi\partial\eta}+A(\xi,\eta)\frac{\partial g}{\partial\xi}+B(\xi,\eta)\frac{\partial g}{\partial\eta}+C(\xi,\eta)g=0,(\xi,\eta)\in\widetilde{\Omega}_8;\qquad(2.4.5)$$

$$g(\xi,-\xi_1;\xi_1,\eta_1)+R(\xi,-\xi_1;\xi_1,\eta_1)=0,\xi_1<\xi;\qquad(2.4.6)$$

$$g(\xi_1,\eta;\xi_1,\eta_1)+R(-\eta,-\xi_1;\xi_1,\eta_1)=0,\eta<-\xi_1;\qquad(2.4.7)$$

Легко видеть, что решение задачи (2.4.5)-(2.4.7) имеет вид

$$g(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)=-R(-\eta,-\xi;\xi_1,\eta_1),(\xi,\eta)\in\widetilde{\Omega}_8.\qquad(2.4.8)$$

Тогда из (2.4.8) получим

$$G_1(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)=-R(-\eta,-\xi;\xi_1,\eta_1)-R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1),(\xi,\eta)\in\widetilde{\Omega}_8.\,(2.4.9)$$

Таким образом, доказана следующая теорема:

Теорема 2.4.2. Функция Грина уравнения (2.1.4)-(2.1.6) существует и единственна. Эта функция Грина может быть выражена с помощью функции Римана-Грина:

$$G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)\equiv 0,\qquad\text{при }\ (\xi,\eta)\in\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3,\Omega_4,\Omega_5,\Omega_6;$$

$$G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1) = -R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1), \text{ при } (\xi,\eta) \in \Omega_7;$$

$$G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1) = -R(-\eta,-\xi;\xi_1,\eta_1) - R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1), \qquad \text{if } (\xi,\eta) \in \Omega_8.$$

Лемма 2.4.3. Пусть (ξ,η) произвольная точка области Ω. По внутренним переменным (ξ_1,η_1) функция Грина задачи (2.1.4)-(2.1.6) обладает следующими свойствами:

$$L^*_{(\xi_1,\eta_1)}G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1) = 0, (\xi_1,\eta_1) \in \Omega,$$

$$\text{при } \xi_1 \neq \xi,\ \eta_1 \neq \eta,\ \xi_1 \neq -\eta; \tag{2.4.10}$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial \xi_1} + \frac{\partial G}{\partial \eta_1}\right)(\xi,\eta;\xi_1,-\xi_1) -$$

$$-(A(\xi_1,-\xi_1) + B(\xi_1,-\xi_1))G(\xi,\eta;\xi_1,-\xi_1) = 0,\ \xi_1 < -\eta; \tag{2.4.11}$$

$$\frac{\partial G(\xi,\eta;\xi-0,\eta_1)}{\partial \eta_1} - A(\xi,\eta_1)G(\xi,\eta;\xi-0,\eta_1) = 0, \text{при } \eta_1 \neq \eta; \tag{2.4.12}$$

$$\frac{\partial G(\xi,\eta;\xi_1,\eta+0)}{\partial \xi_1} - B(\xi_1,\eta)G(\xi,\eta;\xi_1,\eta+0) = 0, \text{при } \xi_1 \neq \xi; \tag{2.4.13}$$

$$\frac{\partial G(\xi,\eta;-\eta-0,\eta_1)}{\partial \xi_1} - B(-\eta,\eta_1)\, G(\xi,\eta;-\eta-0,\eta_1) =$$

$$= \frac{\partial G(\xi,\eta;-\eta+0,\eta_1)}{\partial \xi_1} - B(-\eta,\eta_1)G(\xi,\eta;-\eta+0,\eta_1); \tag{2.4.14}$$

$$G(\xi,\eta;\xi-0,\eta-0) - G(\xi,\eta;\xi+0,\eta-0) +$$

$$+G(\xi,\eta;\xi+0,\eta+0) - G(\xi,\eta;\xi-0,\eta+0) = 1. \tag{2.4.15}$$

Доказательство Свойства (2.4.10)-(2.4.15) могут быть легко получены из построения функции Грина задачи (2.1.4)-(2.1.6). Из (2.4.10)-(2.4.15) можно однозначно восстановить функцию Грина задачи (2.1.1)-(2.1.3).

Используя свойства (2.4.10)-(2.4.15) мы можем использовать его для написания интегрального представления решения задачи (2.1.1)-(2.1.3). Для этого рассмотрим следующий интеграл:

$$\iint_{\Omega_{(\xi\eta)}} G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)F(\xi_1,\eta_1)d\xi_1 d\eta_1 =$$

$$= \iint_{\Omega_{(\xi\eta)}} G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi_1 \partial \eta_1} + a\frac{\partial U}{\partial \xi_1} + b\frac{\partial U}{\partial \eta_1} + cU\right)d\xi_1 d\eta_1. \tag{2.4.16}$$

Применяя теорему Грина на плоскости [27, p. 384-387] и используя начальные условия (2.1.5), свойства функции Грина (2.4.10)-(2.4.15), из (2.4.16) получим следующее представление решения задачи (2.1.1)-(2.1.3) в области $\Omega_{(\xi\eta)}$ при $\eta > 0$:

$$U(\xi,\eta) = -\frac{1}{2}G(\xi,\eta;\eta,\eta)T_1(\eta) - \frac{1}{2}G(\xi,\eta;\xi,\xi)T_1(\xi) -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\xi}^{\eta}\left(\frac{\partial G}{\partial N_1}(\xi,\eta;\xi_1,\xi_1) + 2(a-b)(\xi_1,\xi_1)G(\xi,\eta;\xi_1,\xi_1)\right)T_1(\xi_1)d\xi_1 +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\xi}^{\eta} G(\xi,\eta;\xi_1,\xi_1)M_1(\xi_1)d\xi_1 +$$

$$+\iint_{\Omega_{(\xi\eta)}} G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)F(\xi_1,\eta_1)d\xi_1 d\eta_1. \qquad (2.4.17)$$

Также, при $\eta < 0$, применяя теорему Грина на плоскости [27, p. 384-387] и используя начальные условия (2.1.5), граничное условие (2.1.6), свойства функции Грина (2.4.10)-(2.4.15), из (2.4.16) получим следующее представление решения задачи (2.1.1)-(2.1.6) в области $\Omega_{(\xi\eta)}$:

$$U(\xi,\eta) = -\frac{1}{2}\big(G(\xi,\eta;-\eta-0,-\eta-0) - G(\xi,\eta;-\eta+0,-\eta+0)\big)T_1(-\eta) -$$

$$-\frac{1}{2}G(\xi,\eta;\xi,\xi)T_1(\xi) + \frac{1}{2}\int_0^{-\eta}\frac{\partial G}{\partial N_1}(\xi,\eta;\xi_1,-\xi_1)P(-\xi_1)d\xi_1 +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{\xi}\left(\frac{\partial G}{\partial N_1}(\xi,\eta;\xi_1,\xi_1) + 2(a-b)(\xi_1,\xi_1)G(\xi,\eta;\xi_1,\xi_1)\right)T_1(\xi_1)d\xi_1 -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{\xi} G(\xi,\eta;\xi_1,\xi_1)M_1(\xi_1)d\xi_1 + \iint_{\Omega_{(\xi\eta)}} G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)F(\xi_1,\eta_1)d\xi_1. \qquad (2.4.18)$$

Легко видеть, что (2.4.17), (2.4.18) являются решениями задачи (2.1.4)-(2.1.6).

Результаты в этом направлений дано в работе [33].

3 О ФУНКЦИИ ГРИНА ЗАДАЧИ ДАРБУ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Хорошо известно, что задача Дарбу для гиперболического уравнения корректна как в смысле классических, так и обобщенных решений. В данном разделе представлена интегральная форма решения задачи Дарбу в характеристическом треугольнике для общего двумерного гиперболического уравнения второго порядка. Показано, что решение этой задачи может быть записано с помощью функции Грина. Также показано, что функция Римана-Грина гиперболического уравнения не определена во всей области. Чтобы построить функцию Римана-Грина этого уравнения, важно иметь функцию Римана-Грина той задачи, которая была определена во всех точках области. Для этого было четно продолжено коэффициенты общего гиперболического уравнения. Дано определение функции Грина задачи Дарбу. Его существование и единственность были доказаны. Представлена явная форма функции Грина. Показано, что функция Грина может быть представлена функцией Римана–Грина. Дан метод построения функции Грина для такой задачи.

3.1 Постановка задачи

Пусть $\Omega = \{(\xi,\eta): 0 \le \xi \le 1, \xi \le \eta \le 1\}$. Следующее гиперболическое уравнение рассматривается в Ω:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + a(\xi,\eta)\cdot\frac{\partial u}{\partial\xi} + b(\xi,\eta)\cdot\frac{\partial u}{\partial\eta} + c(\xi,\eta)\cdot u = f(\xi,\eta), \quad (\xi,\eta)\in\Omega, \quad (3.1.1)$$

с начальным условием:

$$u(\xi,\xi) = \tau_0(\xi),\ 0 \le \xi \le 1, \quad (3.1.2)$$

и граничным условием:

$$u(0,\xi_0) = \tau_1(\xi_0),\ 0 \le \xi_0 \le 1. \quad (3.1.3)$$

Будем считать, что $a, b, a_\xi, b_\eta, c, f \in C(\overline{\Omega})$; $\tau_0, \tau_1 \in C^1([0,1])$ и

$$a(\xi,\xi) = b(\xi,\xi),\ 0 \le \xi \le 1. \quad (3.1.4)$$

Если (3.1.4) не выполняется, то мы перепишем функцию $u(\xi,\eta)$ в следующем виде:

$$u(\xi,\eta) = U(\xi,\eta)\cdot\gamma(\eta),\ (\xi,\eta)\in\Omega. \quad (4.1.5)$$

Подставляя (3.1.5) в (3.1.4) получим

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\xi\partial\eta}+a_1(\xi,\eta)\frac{\partial U}{\partial\xi}+b_1(\xi,\eta)\frac{\partial U}{\partial\eta}+c_1(\xi,\eta)U=f_1(\xi,\eta),\quad (\xi,\eta)\in\Omega,$$

где

$$a_1=\frac{\gamma'}{\gamma}+a,\qquad b_1=b,\qquad c_1=\frac{\gamma'}{\gamma}+c,\qquad f_1=\frac{f}{\gamma}.$$

Выберем $\gamma(\eta),\ \xi\le\eta\le 1$ так, чтобы выполнялось следующее условие:

$$a_1(\xi,\xi)=b_1(\xi,\xi),\ 0\le\xi\le 1, \tag{3.1.6}$$

Из (3.1.6) получим уравнение:

$$\frac{\gamma\prime(\xi)}{\gamma(\xi)}+a(\xi,\xi)=b(\xi,\xi),\ 0\le\xi\le 1 \tag{3.1.7}$$

Решая (3.1.7) имеем:

$$\gamma(\xi)=\exp\left(-\int_0^{\xi}(a(s,s)-b(s,s))ds\right).$$

Следовательно, условию (3.1.4) всегда можно получить.

Также предпологаем, что

$$a_\xi(\xi,\xi)=b_\eta(\xi,\xi),\ 0\le\xi\le 1. \tag{3.1.8}$$

3.2 Доказательство корректности задачи

Назовем функцию из класса $u(\xi,\eta),u_{\xi\eta}\in C(\overline{\Omega})$ регулярным решением задачи, преобразующим уравнение (3.1.1), начальные условия (3.1.2) и граничное условие (3.1.3) в тождество.

Теорема 3.2.1 Пусть $a,b,a_\xi,b_\eta,c,f\in C(\overline{\Omega})$; $\tau_0,\tau_1\in C^1([0,1])$. Тогда задача (3.1.1)-(3.1.3) имеет единственное регулярное решение.

Доказательство существования решения задачи (3.1.1)-(3.1.3).

Пусть:

$$u(\xi,\eta)=\zeta(\xi,\eta)\cdot\omega(\xi,\eta). \tag{3.2.1}$$

Тогда (3.1.1) имеет вид

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial\xi\partial\eta}\cdot\omega\quad+\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi\partial\eta}\cdot\zeta+\left[\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}+b\zeta\right]\cdot\frac{\partial\omega}{\partial\eta}+\left[\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}+a\zeta\right]\cdot\frac{\partial\omega}{\partial\xi}+$$

$$+\left[b\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}+a\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}+c\zeta\right]\cdot\omega=f. \tag{3.2.2}$$

Мы выбираем $\zeta(\xi,\eta)$ таким образом, чтобы

$$\frac{\partial\zeta(\xi,\eta)}{\partial\eta}+a(\xi,\eta)\cdot\zeta(\xi,\eta)=0, \tag{3.2.3}$$

выполнялось. Из (3.2.3) получим:

$$\zeta(\xi,\eta)=\exp\left(-\int_0^{\xi}a(\xi,s)ds\right). \tag{3.2.4}$$

Разделив уравнение (3.2.2) на ζ, мы имеем следующую задачу:

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi\partial\eta}+b_2(\xi,\eta)\cdot\frac{\partial\omega}{\partial\eta}+c_2(\xi,\eta)\cdot\omega=f_2=f_2,\ (\xi,\eta)\in\Omega, \tag{3.2.5}$$

$$\omega(\xi,\xi)=\tau_2(\xi),\ 0\le\xi\le 1, \tag{3.2.6}$$

$$\omega(0,\xi_0)=\tau_3(\xi_0),\ 0\le\xi_0\le 1, \tag{3.2.7}$$

где

$$b_2=\frac{1}{\zeta}\cdot\zeta_\xi+b,\qquad f_2(\xi,\eta)=\frac{f(\xi,\eta)}{\zeta(\xi,\eta)},$$

$$c_2=\frac{1}{\zeta}\left(\zeta_{\xi\eta}+a\zeta_\xi+b\zeta_\eta+c\right),\qquad \tau_2(\xi)=\frac{\tau_0(\xi)}{\zeta(\xi,\xi)},\qquad \tau_3(\xi_0)=\frac{\tau_1(\xi_0)}{\zeta(0,\xi_0)}.$$

Введем новое обозначение:

$$\frac{\partial\omega}{\partial\xi}=\upsilon.$$

Тогда уравнение (3.2.5) эквивалентно следующей системе уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\upsilon}{\partial\xi}=f_2(\xi,\eta)-b_2(\xi,\eta)\cdot\upsilon(\xi,\eta)-c_2(\xi,\eta)\cdot\omega(\xi,\eta),\\ \dfrac{\partial\omega}{\partial\eta}=\upsilon(\xi,\eta).\end{cases} \tag{3.2.8}$$

В области Ω возьмем произвольную точку $C(\xi,\eta)$ и проведем характеристики CB, CA до границы области Ω (рисунок 4). Интегрируя первое уравнение системы (3.2.8) по AC, второе по BC и используя условия (3.2.6), (3.2.7) получим:

$$
\begin{cases}
\upsilon(\xi,\eta) = \tau_{3'}(\eta) + \int_0^{\xi} [f_2(\xi_1,\eta) - b_2(\xi_1,\eta)\upsilon(\xi_1,\eta) - c_2(\xi_1,\eta)\omega(\xi_1,\eta)]d\xi_1, \\
\omega(\xi,\eta) = \tau_2(\xi) + \int_{\xi}^{\eta} \upsilon(\xi,\eta_1)d\eta_1, (\xi,\eta) \in \Omega,
\end{cases}
\tag{3.2.9}
$$

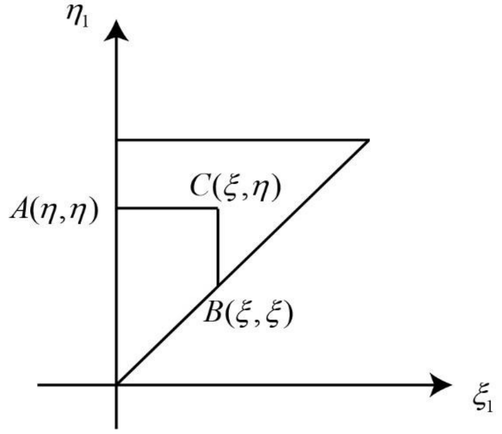

Рисунок 4 – Область Ω

Подставляя второе уравнение системы (3.2.9) в первое уравнение этой системы получим:

$$
\upsilon(\xi,\eta) = \tau_{3'}(\eta) + \int_0^{\xi} f_2(\xi_1,\eta)d\xi_1 - \int_0^{\xi} b_2(\xi_1,\eta)\upsilon(\xi_1,\eta)d\xi_1 -
$$

$$
-\int_0^{\xi} c_2(\xi_1,\eta)\tau_2(\xi_1)d\xi_1 - \int_0^{\xi} d\xi_1 \int_{\xi_1}^{\eta} c_2(\xi_1,\eta)\upsilon(\xi_1,\eta_1)d\eta_1 \tag{3.2.10}
$$

Легко показать, что если $\upsilon(\xi,\eta), \omega(\xi,\eta)$ являются решениями системы (3.2.9), то $\omega(\xi,\eta)$ является решением задачи (3.2.5)-(3.2.7). Следовательно, система (3.2.9) эквивалентна задаче (3.2.5)-(3.2.7).

Будем искать решение уравнения (3.2.10), используя метод последовательных приближений. Выберем начальное приближение

$$
\upsilon_0(\xi,\eta) = 0.
$$

Строим следующее приближение, используя формулы (3.2.11):

$$
\upsilon_n(\xi,\eta) = \tau_{3'}(\eta) + \int_0^{\xi} f_2(\xi_1,\eta)d\xi_1 - \int_0^{\xi} b_2(\xi_1,\eta)\upsilon_{n-1}(\xi_1,\eta)d\xi_1 -
$$

$$
-\int_0^{\xi} c_2(\xi_1,\eta)\tau_2(\xi_1)d\xi_1 - \int_0^{\xi} d\xi_1 \int_{\xi_1}^{\eta} c_2(\xi_1,\eta)\upsilon_{n-1}(\xi_1,\eta_1)d\eta_1 \tag{3.2.11}
$$

Покажем что разность $|\upsilon_n - \upsilon_{n-1}|$ удовлетворяют неравенству:

$$|\upsilon_n - \upsilon_{n-1}| \leq K^{n-1} \cdot A \cdot \frac{\xi^{n-1}}{(n-1)!}, \qquad (3.2.12)$$

где

$$K = \max_{\overline{\Omega}}[|b_2| + |c_2|],$$

$$A \leq \| f_2 \|_{C(\overline{\Omega})} + \| \tau_3 \|_{C'([0,1])} + \| \tau_2 \|_{C'([0,1])}.$$

Докажем справедливость неравенства (3.2.12) с помощью математической индукции. Для $n = 1$, как легко видеть из (3.2.11), оценка (3.2.12) верны.

Покажем, что это неравенство останутся в силе, когда n будет заменено на $n + 1$. Из равенства (3.2.11), согласно классическому методу имеем:

$$|\upsilon_{n+1} - \upsilon_n| = \left| \int_0^{\xi} b_2(\xi_1, \eta)(\upsilon_n - \upsilon_{n-1})(\xi_1, \eta) d\xi_1 \right| +$$

$$+ \left| \int_0^{\xi} d\xi_1 \int_{\xi_1}^{\eta} c_2(\xi_1, \eta)(\upsilon_n - \upsilon_{n-1})(\xi_1, \eta_1) d\eta_1 \right| \leq$$

$$\leq K^{n-1} \cdot A \cdot \int_0^{\xi} |b_2| \frac{\xi_1^{n-1}}{(n-1)!} d\xi_1 +$$

$$+ K^{n-1} \cdot A \cdot \int_0^{\xi} |c_2| \frac{\xi_1^{n-1}}{(n-1)!} d\xi_1 \leq \frac{K^n}{n!} \cdot A \cdot \xi^n.$$

Оценки (3.2.12) показывают абсолютную и равномерную сходимость по $\overline{\Omega}$ следующего ряда:

$$\upsilon_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\upsilon_n - \upsilon_{n-1}),$$

члены которых меньше абсолютного значения членов равномерно сходящегося ряда:

$$A + A \cdot \sum_{n=1}^{\infty} K^{n-1} \frac{\xi^{n-1}}{(n-1)!} = A(1+\exp(K\xi)).$$

Следовательно, последовательное приближения υ_n на $\overline{\Omega}$ равномерно стремятся, соответственно, к определенному пределу υ который непрерывен на $\overline{\Omega}$. Переходя к пределу в равенстве (3.2.11) получим, что предельная функция $\upsilon(\xi,\eta)$ удовлетворяет системе (3.2.9). В этом случае функция υ непрерывен на $\overline{\Omega}$. Таким образом доказано существование решения в $\overline{\Omega}$. Решение задачи (3.1.1)-(3.1.3) найдется путем замены ω, ζ на (3.2.1).

Доказательство единственности решения задачи (3.2.5)-(3.2.7).

Предположим, что система (3.2.9) имеет различные решения υ_1, υ_2. Обозначим $V = \upsilon_1 - \upsilon_2$. Тогда V, W удовлетворяют следующему уравнению:

$$V(\xi,\eta) = -\int_0^{\xi} b_2(\xi_1,\eta)V(\xi_1,\eta)d\xi_1 - \int_0^{\xi} d\xi_1 \int_{\xi_1}^{\eta} c_2(\xi_1,\eta)V(\xi_1,\eta_1)d\eta_1$$

Докажем, что $V \equiv 0$. Функции V непрерывен и ограничен как разность непрерывных функций в замкнутой области $\overline{\Omega}$. Следовательно, существует положительная константа B такая, что

$$|V(\xi,\eta)| \le B.$$

Тогда имеем

$$V \le \int_0^{\xi} |b_2(\xi_1,\eta)|Bd\xi_1 + \int_0^{\xi} |c_2(\xi_1,\eta)|(\eta-\xi_1)Bd\xi_1 \le$$
$$\le \int_0^{\xi} |b_2(\xi_1,\eta)|Bd\xi_1 + \int_0^{\xi} |c_2(\xi_1,\eta)|Bd\xi_1 \le \frac{K \cdot B \cdot \xi}{1!}.$$

С помощью математической индукции для любого n получим следующую оценку:

$$|V| \le BK^n \frac{\xi^n}{n!}.$$

Поскольку это неравенство выполняется для любого n, то из этого следует, что $V \equiv 0$, т.е. $\upsilon_1 = \upsilon_2$.

Доказательство устойчивости решения задачи (3.2.5)-(3.2.7).

Чтобы доказать устойчивость решения задачи (3.2.5)-(3.2.7), нам нужна оценка устойчивости для υ. Из

$$\upsilon(\xi,\eta) = \lim_{N\to\infty} \upsilon_N = \lim_{N\to\infty}\left[\upsilon_0 + \sum_{n=1}^{N} (\upsilon_n - \upsilon_{n-1})\right] =$$

$$= \upsilon_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\upsilon_n - \upsilon_{n-1}), \qquad (3.2.13)$$

затем, используя оценку (3.2.12) из (3.2.13) получим

$$|\upsilon(\xi,\eta)| \le A \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K^{n-1}}{(n-1)!}\xi^{n-1} = A \cdot \exp(K). \qquad (3.2.14)$$

Используя равенство (3.2.12) из (3.2.14) получим

$$||\upsilon||_{C(\Omega)} \quad \le \exp(K)\left(\| f_2 \|_{C(\overline{\Omega})} + \| \tau_3 \|_{C\prime([0,1])} + \| c_1 \|_{C([0,1])} \cdot \| \tau_2 \|_{C\prime([0,1])}\right) \le$$

$$\le \exp(2K)\left(\| f_2 \|_{C(\overline{\Omega})} + \| \tau_3 \|_{C\prime([0,1])} + \| \tau_2 \|_{C\prime([0,1])}\right)$$

3.3 О функции Грина

Определение 3.3.1 Функцией Грина задачи (3.1.1)-(3.1.3) является функция $G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)$, которая для каждого фиксированного $(\xi_1,\eta_1) \in \Omega$ удовлетворяет однородному уравнению:

$$L_{(\xi,\eta)} G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1) = 0, (\xi,\eta) \in \Omega,$$

$$\text{при } \xi \ne \xi_1,\ \eta \ne \eta_1,\ \eta \ne \xi_1,\ \xi \ne \eta_1; \qquad (3.3.1)$$

и следующим граничным условиям:

$$G(\xi,\xi;\xi_1,\eta_1) = 0, 0 \le \xi \le 1, (\xi_1,\eta_1) \in \Omega; \qquad (3.3.2)$$

$$G(0,\xi_0;\xi_1,\eta_1) = 0, 0 \le \xi_0 \le 1, (\xi_1,\eta_1) \in \Omega; \qquad (3.3.3)$$

и условиям на характеристиках:

$$\frac{\partial G(\xi_1 + 0,\eta;\xi_1,\eta_1)}{\partial \eta} + a(\xi_1,\eta) G(\xi_1 + 0,\eta;\xi_1,\eta_1) =$$

$$= \frac{\partial G(\xi_1 - 0,\eta;\xi_1,\eta_1)}{\partial \eta} + a(\xi_1,\eta) G(\xi_1 - 0,\eta;\xi_1,\eta_1), \text{при } \ne \eta_1,\ \eta \ne \xi_1; \qquad (3.3.4)$$

$$\frac{\partial G(\xi,\eta_1+0;\xi_1,\eta_1)}{\partial\xi}+b(\xi,\eta_1)G(\xi,\eta_1+0;\xi_1,\eta_1)=$$

$$=\frac{\partial G(\xi,\eta_1-0;\xi_1,\eta_1)}{\partial\xi}+b(\xi,\eta_1)G(\xi,\eta_1-0;\xi_1,\eta_1),\text{при }\ \xi\neq\xi_1; \qquad (3.3.5)$$

$$\frac{\partial G(\eta_1+0,\eta;\xi_1,\eta_1)}{\partial\eta}+a(\eta_1,\eta)G(\eta_1+0,\eta;\xi_1,\eta_1)=$$

$$=\frac{\partial G(\eta_1-0,\eta;\xi_1,\eta_1)}{\partial\eta}+a(\eta_1,\eta)G(\xi_1-0,\eta;\xi_1,\eta_1),\text{при }\ \eta\neq\eta_1,\ \eta\neq\xi_1;(3.3.6)$$

$$\frac{\partial G(\xi,\eta_1+0;\xi_1,\eta_1)}{\partial\xi}+b(\xi,\eta_1)G(\xi,\eta_1+0;\xi_1,\eta_1)=$$

$$=\frac{\partial G(\xi,\eta_1-0;\xi_1,\eta_1)}{\partial\xi}+b(\xi,\eta_1)G(\xi,\eta_1-0;\xi_1,\eta_1),\text{при }\ \xi\neq\xi_1\ \ \xi\neq\eta_1;(3.3.7)$$

$$\frac{\partial G(\xi,\xi_1+0;\xi_1,\eta_1)}{\partial\xi}+b(\xi,\xi_1)G(\xi,\xi_1+0;\xi_1,\eta_1)=$$

$$=\frac{\partial G(\xi,\xi_1-0;\xi_1,\eta_1)}{\partial\xi}+b(\xi,\xi_1)G(\xi,\xi_1-0;\xi_1,\eta_1)\text{ при }\ \xi\neq\xi_1\ \ \xi\neq\eta_1;(3.3.8)$$

и при $(\xi,\eta)=(\xi_1,\eta_1)$ должно выпонятся следующее условие:

$$G(\xi_1-0,\eta_1-0;\xi_1,\eta_1)-G(\xi_1+0,\eta_1-0;\xi_1,\eta_1)+$$

$$+G(\xi_1+0,\eta_1+0;\xi_1,\eta_1)-G(\xi_1-0,\eta_1+0;\xi_1,\eta_1)=1. \qquad (3.3.9)$$

3.4 Существование и единственность функции Грина задачи

Теорема 3.4.1. Функция $G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)$, удовлетворяющая условиям (3.3.1)-(3.3.9), существует и единственно.

Доказательство. Чтобы показать, что функция $G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)$, удовлетворяющая условиям (3.3.1)-(3.3.9), существует и единственна, мы разделим область Ω на несколько подобластей (рисунок 5) и последовательно рассмотрим следующие задачи. Пусть (ξ_1,η_1) - произвольная точка области Ω.

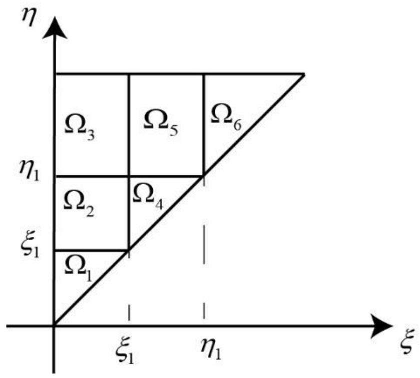

Рисунок 5 – Разделение области Ω

В области $\Omega_1 = \{(\xi,\eta): 0 < \xi < \xi_1, \xi < \eta < \xi_1\}$ рассмотрим задачу:

$$L_{(\xi,\eta)}G = 0, (\xi,\eta) \in \Omega_1; \quad (3.4.1)$$

$$G(\xi,\xi;\xi_1,\eta_1) = 0, \xi \geq 0; \quad (3.4.2)$$

$$G(0,\xi_0;\xi_1,\eta_1) = 0, 0 \leq \xi_0 \leq \xi_1, (\xi_1,\eta_1) \in \Omega_1. \quad (3.4.3)$$

Задача (3.4.1)-(3.4.3) является задачей Дарбу и имеет единственное решение:

$$G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1) \equiv 0, (\xi,\eta) \in \Omega_1. \quad (3.4.4)$$

В области $\Omega_2 = \{(\xi,\eta): 0 \leq \xi \leq \xi_1, \xi_1 \leq \eta \leq \eta\}$ рассмотрим задачу:

$$L_{(\xi,\eta)}G = 0, (\xi,\eta) \in \Omega_2; \quad (3.4.5)$$

$$G(0,\xi_0;\xi_1,\eta_1) = 0, \xi \leq \xi_0 \leq \eta_1, (\xi_1,\eta_1) \in \Omega_2. \quad (3.4.6)$$

Из (3.4.4) имеем следущее неравенство:

$$\frac{\partial G(\xi,\xi_1+0;\xi_1,\eta_1)}{\partial \xi} + b(\xi,\xi_1)G(\xi,\xi_1+0;\xi_1,\eta_1) = 0,\ 0 \leq \xi \leq \xi_1. \quad (3.4.7)$$

Интегрируя (3.4.7) по ξ получим

$$G(\xi,\xi_1+0;\xi_1,\eta_1) = \exp\left(-\int_0^\xi b(t,\xi_1)dt\right) C_1(\xi_1,\eta_1), 0 \leq \xi \leq \xi_1. \quad (3.4.8)$$

Подставляя $\xi = 0$ в (3.4.9), используя условие (4.3.2) имеем, что $C_1(\xi_1,\eta_1) \equiv 0$ и

$$G(\xi,\xi_1+0;\xi_1,\eta_1) = 0, 0 \leq \xi \leq \xi_1. \quad (3.4.9)$$

Задача (3.4.5), (3.4.6), (3.4.9) является задачей Гурса и имеет единственное решение:

$$G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1) \equiv 0, (\xi,\eta) \in \Omega_2. \quad (3.4.10)$$

Следовательно из (3.4.10) в области $\Omega_3 = \{(\xi,\eta): 0 \le \xi \le \xi_1, \eta_1 \le \eta \le 1\}$ получим задачу:

$$L_{(\xi,\eta)}G = 0, (\xi,\eta) \in \Omega_3; \quad (3.4.11)$$

$$G(0,\xi_0;\xi_1,\eta_1) = 0, \eta_1 \le \xi_0 \le 1, (\xi_1,\eta_1) \in \Omega_3; \quad (3.4.12)$$

$$\frac{\partial G(\xi,\eta_1+0;\xi_1,\eta_1)}{\partial \xi} + b(\xi,\eta_1)\cdot G(\xi,\eta_1+0;\xi_1,\eta_1) = 0, 0 \le \xi \le \xi_1. \quad (3.4.13)$$

Интегрируя (3.4.13) по ξ имеем:

$$G(\xi,\eta_1+0;\xi_1,\eta_1) = \exp\left(-\int_0^\xi b(t,\eta_1)dt\right) C_2(\xi_1,\eta_1), 0 \le \xi \le \xi_1. \quad (3.4.14)$$

Подставляя $\xi = 0$ в (3.4.15), используя условие (4.3.2) получим, что $C_2(\xi_1,\eta_1) \equiv 0$ и

$$G(\xi,\eta_1+0;\xi_1,\eta_1) = 0, 0 \le \xi \le \xi_1. \quad (3.4.15)$$

Следовательно, задача (3.4.11), (3.4.12), (3.4.15) является задачей Гурса и имеет единственное решение:

$$G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1) \equiv 0, (\xi,\eta) \in \Omega_3. \quad (3.4.16)$$

В области $\Omega_4 = \{(\xi,\eta): 0 \le \xi \le \xi_1, \xi \le \eta \le \eta_1\}$ рассмотрим задачу:

$$L_{(\xi,\eta)}G = 0, (\xi,\eta) \in \Omega_4; \quad (3.4.17)$$

$$G(\xi,\xi;\xi_1,\eta_1) = 0, \xi_1 \le \xi \le \eta_1. \quad (3.4.18)$$

$$\frac{\partial G(\xi_1+0,\eta;\xi_1,\eta_1)}{\partial \eta} + a(\xi_1,\eta)G(\xi_1+0,\eta;\xi_1,\eta_1) = 0,\ \xi_1 \le \eta \le \eta_1. \quad (3.4.19)$$

Интегрируя (3.4.19) по η получим

$$G(\xi_1+0,\eta;\xi_1,\eta_1) = \exp\left(-\int_{\xi_1}^\eta a(\xi_1,t)dt\right) C_3(\xi_1,\eta_1), \xi_1 \le \eta \le \eta_1; \quad (3.4.20)$$

Подставляя $\eta=\xi_1$ в (3.4.20), используя условие (4.3.2) получим, что $C_3(\xi_1,\eta_1)\equiv 0$ и

$$G(\xi_1+0,\eta;\xi_1,\eta_1)=0, \xi_1\le\eta\le\eta_1. \quad (3.4.21)$$

Задача (3.4.17), (3.4.18), (3.4.21) является задачей Дарбу и имеет единственное решение:

$$G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)\equiv 0, (\xi,\eta)\in\Omega_4. \quad (3.4.22)$$

Следовательно, из (3.4.16), (3.4.22) в области $\Omega_5=\{(\xi,\eta): \xi_1\le\xi\le\eta_1, \eta_1\le\eta\le 1\}$ наша задача является задачей Коши

$$L_{(\xi,\eta)}G=0, (\xi,\eta)\in\Omega_5; \quad (3.4.23)$$

$$\frac{\partial G(\xi_1+0,\eta;\xi_1,\eta_1)}{\partial\eta}+a(\xi_1,\eta)G(\xi_1+0,\eta;\xi_1,\eta_1)=0, \eta_1\le\eta\le 1; \quad (3.4.24)$$

$$\frac{\partial G(\xi,\eta_1+0;\xi_1,\eta_1)}{\partial\xi}+b(\xi,\eta_1)G(\xi,\eta_1+0;\xi_1,\eta_1)=0, \xi_1\le\xi\le\eta_1; \quad (3.4.25)$$

$$G(\xi_1+0,\eta_1+0;\xi_1,\eta_1)=1. \quad (3.4.26)$$

Задача (3.4.23)-(3.4.26) является задачей Гурса и имеет единственное решение, и легко видеть, что ее решение совпадает с функцией Римана-Грина, то есть,

$$G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)=R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1), (\xi,\eta)\in\Omega_5. \quad (3.4.27)$$

Тем самым из (3.4.28) в области $\Omega_6=\{(\xi,\eta): \eta_1\le\xi\le 1, \xi\le\eta\le 1\}$ получим задачу

$$L_{(\xi,\eta)}G=0, (\xi,\eta)\in\Omega_6; \quad (3.4.28)$$

$$G(\xi,\xi;\xi_1,\eta_1)=0, \eta_1\le\xi\le 1; \quad (3.4.29)$$

$$\frac{\partial G(\eta_1+0,\eta;\xi_1,\eta_1)}{\partial\eta}+b(\eta_1,\eta)G(\eta_1+0,\eta;\xi_1,\eta_1)=$$

$$=\frac{\partial R(\eta_1,\eta;\xi_1,\eta_1)}{\partial\eta}+b(\eta_1,\eta)R(\eta_1,\eta;\xi_1,\eta_1). \quad (3.4.30)$$

Перепишем условие (3.4.30) в следующем виде:

$$\left[\frac{\partial}{\partial\eta}\left(G(\eta_1+0,\eta;\xi_1,\eta_1)\exp\left(\int_\xi^\eta a(\eta_1,t)dt\right)\right)\right]\exp\left(-\int_\xi^\eta a(\eta_1,t)dt\right)=$$

$$=\left[\frac{\partial}{\partial\eta}\left(R(\eta_1,\eta;\xi_1,\eta_1)\exp\left(\int_\xi^\eta a(\eta_1,t)dt\right)\right)\right]\exp\left(-\int_\xi^\eta a(\eta_1,t)dt\right). \quad (3.4.31)$$

Интегрируя (3.4.31) по η получим

$$G(\eta_1+0,\eta;\xi_1,\eta_1)=R(\eta_1,\eta;\xi_1,\eta_1)+$$

$$+C_4(\xi_1,\eta_1)\exp\left(-\int_\xi^\eta a(\eta_1,t)dt\right). \quad (3.4.32)$$

Используя условие (3.3.2) из (3.4.32) имеем

$$G(\eta_1+0,\eta;\xi_1,\eta_1)=R(\eta_1,\eta;\xi_1,\eta_1)-$$

$$-R(\eta_1,\eta_1;\xi_1,\eta_1)\exp\left(-\int_{\eta_1}^\eta a(\eta_1,t)dt\right),\ \xi\le\eta\le 1. \quad (3.4.33)$$

Задача (3.4.28), (3.4.29), (3.4.33) является задачей Дарбу и имеет единственное решение.

Таким образом показано, что для любых $(\xi_1,\eta_1)\in\Omega$ и $(\xi,\eta)\in\Omega$ функция Грина, удовлетворяющая условиям (3.3.1)-(3.3.9), существует и единственна. Теорема доказана.

Следствие 3.4.2. В ходе доказательства существования функции Грина получили, что $G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)\equiv 0$ в областях Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4.

3.5 Построение функции Грина

Как видно из доказательства теоремы 3.4.1, функция Грина $G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)=0$ в областях Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4. В области Ω_5 она совпадает с функцией Римана (3.4.28).

Найдем представление функции Грина в области Ω_6. Чтобы построить функции Грина, продолжим коэффициенты уравнения (3.4.28) в $\Omega_6^*=\{(\xi,\eta):\eta_1\le\xi\le 1,\ \eta_1\le\eta\le\xi\}$ таким образом, чтобы выполнялось следующие условия:

$$A(\xi,\eta)=\begin{cases}a(\xi,\eta), & (\xi,\eta)\in\Omega_6,\\ b(\eta,\xi), & (\xi,\eta)\in\Omega_6^*,\end{cases}$$

$$B(\xi,\eta)=\begin{cases}b(\xi,\eta), & (\xi,\eta)\in\Omega_6,\\ a(\eta,\xi), & (\xi,\eta)\in\Omega_6^*,\end{cases}$$

$$C(\xi,\eta) = \begin{cases} c(\xi,\eta), & (\xi,\eta) \in \Omega_6, \\ c(\eta,\xi). & (\xi,\eta) \in \Omega_6^* \end{cases}$$

Покажем, что коэффициенты (3.4.28) имеют следующую симметрию:

$$A(\xi,\eta) = B(\eta,\xi),\ C(\xi,\eta) = C(\eta,\xi),\ (\xi,\eta) \in \Omega_6. \tag{3.5.1}$$

Из (3.5.1) имеем

$$A(\eta,\xi) = \begin{cases} a(\eta,\xi), & (\eta,\xi) \in \Omega_6, \\ b(\xi,\eta), & (\eta,\xi) \in \Omega_6^*, \end{cases} = \begin{cases} b(\xi,\eta), & (\xi,\eta) \in \Omega_6, \\ a(\eta,\xi), & (\xi,\eta) \in \Omega_6^*, \end{cases} = B(\xi,\eta).$$

Если выбрать (ξ,η) из Ω_6, то (η,ξ) будет из Ω_6^*.
Из (4.1.4) получим

$$A(\xi,\xi) = B(\xi,\xi), \qquad A_\xi(\xi,\xi) = B_\eta(\xi,\xi), \qquad 0 \le \xi \le 1.$$

Если коэффициенты $a, b, a_\xi, b_\eta, c \in C(\overline{\Omega})$ тогда в силу (3.1.8) коэффициенты $A(\xi,\eta),\ B(\xi,\eta), C(\xi,\eta)$ в $\widetilde{\Omega_6} = \Omega_6 \cup \Omega_6^* = \{(\xi,\eta): \eta_1 \le \xi \le 1,$ $\eta_1 \le \eta \le 1\}$ имеют следующую гладкость:

$$A, B, A_\xi, B_\eta, C \in C\left(\overline{\widetilde{\Omega_6}}\right). \tag{3.5.2}$$

Пусть (ξ_1,η_1) - произвольная точка области Ω. Чтобы построить функцию Грина в области Ω_6, рассмотрим задачу:

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial\xi\partial\eta} + A(\xi,\eta)\frac{\partial G_1}{\partial\xi} + B(\xi,\eta)\frac{\partial G_1}{\partial\eta} + C(\xi,\eta)G_1 = 0, (\xi,\eta) \in \widetilde{\Omega}_6; \tag{3.5.3}$$

$$G(\eta_1 + 0, \eta; \xi_1, \eta_1) = R(\eta_1, \eta; \xi_1, \eta_1) -$$

$$-\exp\left(-\int_{\xi_1}^{\eta} A(\eta_1, t)dt\right),\ \eta_1 \le \eta \le 1; \tag{3.5.4}$$

$$G(\xi, \eta_1 + 0; \xi_1, \eta_1) = -R(\eta_1, \xi; \xi_1, \eta_1) +$$

$$+\exp\left(-\int_{\xi_1}^{\xi} B(t, \eta_1)dt\right),\ \eta_1 \le \xi \le 1. \tag{3.5.5}$$

Задача (3.5.3)-(3.5.5) - задача Гурса. Его решение существует и единственно. Нас интересует представление функции $G_1(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)$. Решение задачи (3.5.3)-(3.5.5) мы ищем в следующем виде:

$$G_1(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1) = R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1) - g(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1), (\xi,\eta) \in \widetilde{\Omega}_6.$$

Тогда получим следующую задачу:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial\xi\partial\eta} + A(\xi,\eta)\frac{\partial g}{\partial\xi} + B(\xi,\eta)\frac{\partial g}{\partial\eta} + C(\xi,\eta)g = 0, (\xi,\eta) \in \widetilde{\Omega}_6; \qquad (3.5.6)$$

$$g(\eta_1,\eta;\xi_1,\eta_1) - R(\eta,\eta_1;\xi_1,\eta_1) = 0, \eta_1 \le \eta \le 1; \qquad (3.5.7)$$

$$g(\xi,\eta_1;\xi_1,\eta_1) - R(\eta_1,\xi;\xi_1,\eta_1) = 0, \eta_1 \le \xi \le 1. \qquad (3.5.8)$$

Легко видеть, что решение задачи (3.5.6)-(3.5.8) имеет вид

$$g(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1) = R(\eta,\xi;\xi_1,\eta_1), (\xi,\eta) \in \widetilde{\Omega}_6.$$

Пусть (ξ,η) - произвольная точка области Ω. По внутренним переменным (ξ_1,η_1) функция Грина задачи (3.1.1)-(3.1.3) обладает следующими свойствами:

$$L^*_{(\xi_1,\eta_1)}G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1) = 0, (\xi_1,\eta_1) \in \Omega, \text{при } \xi_1 \ne \xi,\ \xi_1 \ne \eta,\ \eta_1 \ne \xi; \quad (3.5.9)$$

$$G(\xi_1,\xi_1;\xi_1,\eta_1) = 0,\ 0 \le \xi_1 \le 1; \qquad (3.5.10)$$

$$\frac{\partial G(\xi,\eta;\xi-0,\eta_1)}{\partial\eta_1} - a(\xi,\eta_1)G(\xi,\eta;\xi-0,\eta_1) = 0, \text{при } \eta_1 \ne \eta,\ \eta_1 \ne \xi; \quad (3.5.11)$$

$$\frac{\partial G(\xi,\eta;\xi_1,\eta-0)}{\partial\xi_1} - b(\xi_1,\eta)G(\xi,\eta;\xi_1,\eta-0) = 0, \text{при } \xi_1 \ne \xi; \qquad (3.5.12)$$

$$\frac{\partial G(\xi,\eta;\xi_1,\xi-0)}{\partial\xi_1} - b(\xi_1,\xi)\,G(\xi,\eta;\xi_1,\xi-0) =$$

$$= \frac{\partial G(\xi,\eta;\xi_1,\xi+0)}{\partial\xi_1} - b(\xi_1,\xi)G(\xi,\eta;\xi_1,\xi+0); \qquad (3.5.13)$$

$$G(\xi,\eta;\xi-0,\eta-0) - G(\xi,\eta;\xi+0,\eta-0) +$$

$$+G(\xi,\eta;\xi+0,\eta+0) - G(\xi,\eta;\xi-0,\eta+0) = 1. \qquad (3.5.14)$$

Свойства (3.5.9)-(3.5.14) легко вывести из построения функции Грина задачи (3.1.1)-(3.1.3). С помощью (3.5.9)-(3.5.14) возможно однозначно восстановить функцию Грина задачи (3.1.1)-(3.1.3).

Свойству (3.5.9)-(3.5.14) мы можем использовать для представления решения задачи (3.1.1)-(3.1.3) в интегральном виде. Для этого рассмотрим следующий интеграл:

$$\iint_{\Omega_{(\xi\eta)}} G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)f(\xi_1,\eta_1)d\xi_1 d\eta_1 =$$

$$= \iint_{\Omega_{(\xi\eta)}} G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi_1\partial\eta_1} + a\frac{\partial u}{\partial\xi_1} + b\frac{\partial u}{\partial\eta_1} + cu\right)d\xi_1 d\eta_1. \quad (3.5.15)$$

Применяя теорему Грина на плоскости и используя начальные условия (3.1.2), свойства функции Грина (3.5.9)-(3.5.14), из (3.5.15) получим следующее представление решения задачи (3.1.1)-(3.1.3) в области $\Omega_{(\xi\eta)} = \Omega_5 \cup \Omega_6$:

$$u(\xi,\eta) = \frac{1}{2}G(\xi,\eta;0,\eta-0)\tau_1(\eta) - \frac{1}{2}\int_0^{\xi}\frac{\partial G}{\partial N_1}(\xi,\eta;\xi_1,\xi_1)\tau_0(\xi_1)d\xi_1 +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{\xi}\left(-\frac{\partial G}{\partial\eta_1}(\xi,\eta;0,\eta_1)\tau_0(\eta_1) + G(\xi,\eta;0,\eta_1)\tau_{1'}(\eta_1)\right.$$

$$\left. + a(0,\eta_1)G(\xi,\eta;0,\eta_1)\tau_1(\eta_1)\right)d\eta_1 +$$

$$+\iint_{\Omega_{(\xi\eta)}} G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)f(\xi_1,\eta_1)d\xi_1 d\eta_1.$$

Результаты в этом направлений дано в работе [34], [35].

4 О ФУНКЦИИ ГРИНА АСИММЕТРИЧНОЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ С УСЛОВИЕМ ДИРИХЛЕ

4.1 Постановка задачи

В характеристическом треугольнике $\Omega = \{(\xi,\eta): 0 < \xi < \eta < 1\}$ (рисунок 1) рассмотрим гиперболическое уравнение второго рода общего вида:

$$Lu = u_{\xi\eta} + a(\xi,\eta)u_\xi + b(\xi,\eta)u_\eta + c(\xi,\eta)u = f(\xi,\eta),\ (\xi,\eta) \in \Omega, \quad (4.1.1)$$

с нелокальной краевой задачей со сдвигом:

$$u(0,\xi_0) = \alpha u(\xi_0,1),\ 0 \le \xi_0 \le 1, \quad (4.1.2)$$

и на нехарактерной прямой $AB = \{0 \le \xi = \eta \le 1\}$ задается условие Дирихле:

$$u(\xi,\xi) = 0,\ 0 \le \xi \le 1, \quad (4.1.3)$$

где $a,\ b,\ a_\xi,\ b_\eta,\ c,\ f \in C(\overline{\Omega})$; α - константа.

4.2 Доказательство существование решения задачи

Ранее аналогичной задачей со сдвигом занимался Т.Ш. Кальменов [5, p. 63-66]. Он рассмотрел следующую задачу:

$$U_{tt} - U_{ss} = -\lambda U(s,t),\ (s,t) \in \Gamma, \quad (4.2.1)$$

$$U(s,0) = U(1,1) = 0,\ 0 \le s \le 2, \quad (4.2.2)$$

$$U(t,t) = U(1+t,1-t),\ 0 \le t \le 1. \quad (4.2.3)$$

Показано, что задача (4.2.1)-(4.2.3) является самосопряженной. Собственная функция и собственные значения задачи (4.2.1)-(4.2.3) были рассчитаны. Но эта работа содержит только спектральные результаты.

Kreith K. [12, p. 272-279] включил идеи Т.Ш. Калменова в свою работу для разработки метода построения функции Грина следующей задачи:

$$U_{tt} - U_{ss} = f_1(s,t), \qquad (s,t) \in \Gamma,$$

$$U(s,0) = U(1,1) = 0, \qquad 0 \le s \le 2,$$

$$U_t(s,0) = kg(s), \qquad 0 \le s \le 2,$$

где $f_1(s,t) = U(s,t)$, $g(t) = U(1+s, 1-s)$, $g(s)$ является непрерывным и положительным при $0 \leq s \leq 2$, а k - константа.

Используя представления решения задачи Коши (4.1.1), (4.1.3) с использованием метода Римана будем искать решение задачи (4.1.1)-(4.1.3) в следующем виде:

$$u(\xi,\eta) = -\int_{\xi}^{\eta} d\xi_1 \int_{\xi_1}^{\eta} R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1) f(\xi_1,\eta_1) d\eta_1 +$$

$$+\int_{\xi}^{\eta} \nu(\xi_1) R(\xi,\eta;\xi_1,\xi_1) d\xi_1, (\xi,\eta) \in \Omega, \qquad (4.2.4)$$

где $R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)$ - функция Римана-Грина уравнения (4.1.1). Предполагаем, что

$$1 + \frac{\alpha R(\xi,1;\xi,\xi)}{R(0,\xi;\xi,\xi)} =$$

$$= 1 + \exp\left(-\int_0^{\xi} b(s,\xi) ds\right) \exp\left(-\int_{\xi}^{1} a(\xi,s) ds\right) = \beta(\xi) \neq 0, \qquad 0 \leq \xi \leq 1,$$

$$\beta(\xi) \cdot \exp\left(\int_0^{\xi} b(s,\xi) ds\right) = \gamma(\xi), \qquad 0 \leq \xi \leq 1.$$

Тогда, подставляя (4.2.4) в (4.1.2):

$$\nu(\xi) + \frac{1}{\gamma}\int_0^{\xi} \nu(\xi_1) R_{\xi}(0,\xi;\xi_1,\xi_1) d\xi_1 -$$

$$-\frac{\alpha}{\gamma}\int_{\xi}^{1} \nu(\xi_1) R_{\xi}(\xi,1;\xi_1,\xi_1) d\xi_1 = \overline{F}(\xi;\xi_1,\eta_1), 0 \leq \xi \leq 1, \qquad (4.2.5)$$

где

$$\overline{F}(\xi;\xi_1,\eta_1) = \frac{1}{\gamma}\int_0^{\xi} R(0,\xi;\xi_1,\xi) f(\xi_1,\xi) d\xi_1 +$$

$$+\frac{1}{\gamma}\int_0^{\xi} d\xi_1 \int_{\xi_1}^{\xi} R_{\xi}(0,\xi;\xi_1,\eta_1) f(\xi_1,\eta_1) d\eta_1 +$$

$$+\frac{\alpha}{\gamma}\int_{\xi}^{1} R(\xi,1;\xi,\xi_1) f(\xi,\xi_1) d\xi_1 -$$

$$-\frac{\alpha}{\gamma}\int_{\xi}^{1} d\xi_1 \int_{\xi}^{1} R_{\xi}(\xi,1;\xi_1,\eta_1) f(\xi_1,\eta_1) d\eta_1, \qquad 0 \le \xi \le 1.$$

Уравнение (4.2.5) является уравнением Фредгольма второго рода. Следовательно, если предположим, что решение $\nu \in C([0,1])$ уравнения (4.2.5) единственно, то оно существует.

Теорема 4.2.1. Пусть $a,\ b,\ a_{\xi},\ b_{\eta},\ c \in C(\overline{\Omega})$. Если решение задачи (4.1.1)-(4.1.3) единственно, тогда для любого $f \in C(\overline{\Omega})$ решение $u \in C^1(\overline{\Omega})$, $u_{\xi\eta} \in C(\overline{\Omega})$ задачи (5.1.1)-(5.1.3) существует.

4.3 Определение функции Грина

Определение 4.3.1 Функцией Грина задачи (4.1.1)-(4.1.3) является функция $G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)$, которая для каждого фиксированного $(\xi_1,\eta_1) \in \Omega$ удовлетворяет однородному уравнению:

$$L_{(\xi,\eta)} G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1) = 0, (\xi,\eta) \in \Omega,$$

$$\text{при } \xi \neq \xi_1,\ \xi \neq \eta_1,\ \eta \neq \xi_1,\ \eta \neq \eta_1, \tag{4.3.1}$$

и следующим условиям на границе:

$$G(\xi,\xi;\xi_1,\eta_1) = 0, 0 \le \xi \le 1, (\xi_1,\eta_1) \in \Omega; \tag{4.3.2}$$

$$G(0,\xi_0;\xi_1,\eta_1) = \alpha G(\xi_0,1;\xi_1,\eta_1), 0 \le \xi_0 \le 1, (\xi_1,\eta_1) \in \Omega, \tag{4.3.3}$$

и условиям на характеристиках:

$$G_{\eta}(\xi_1+0,\eta;\xi_1,\eta_1) + a(\xi_1,\eta) G(\xi_1+0,\eta;\xi_1,\eta_1) =$$

$$= G_{\eta}(\xi_1-0,\eta;\xi_1,\eta_1) + a(\xi_1,\eta) G(\xi_1-0,\eta;\xi_1,\eta_1),$$

$$\text{при } \eta \neq \xi_1,\ \eta \neq \eta_1; \tag{4.3.4}$$

$$G_{\eta}(\eta_1+0,\eta;\xi_1,\eta_1) + a(\eta_1,\eta) G(\eta_1+0,\eta;\xi_1,\eta_1) =$$

$$= G_{\eta}(\eta_1-0,\eta;\xi_1,\eta_1) + a(\eta_1,\eta) G(\eta_1-0,\eta;\xi_1,\eta_1),$$

$$\text{при } \eta \neq \xi_1,\ \eta \neq \eta_1; \tag{4.3.5}$$

$$G_{\xi}(\xi,\xi_1+0;\xi_1,\eta_1) + b(\xi,\xi_1) G(\xi,\xi_1+0;\xi_1,\eta_1) =$$

$$= G_{\xi}(\xi,\xi_1-0;\xi_1,\eta_1) + b(\xi,\xi_1) G(\xi,\xi_1-0;\xi_1,\eta_1),$$

$$\text{при } \xi \neq \xi_1,\ \xi \neq \eta_1; \tag{4.3.6}$$

$$G_\xi(\xi, \eta_1 + 0; \xi_1, \eta_1) + b(\xi, \eta_1)G(\xi, \eta_1 + 0; \xi_1, \eta_1) =$$

$$= G_\xi(\xi, \eta_1 - 0; \xi_1, \eta_1) + b(\xi, \eta_1)G(\xi, \eta_1 - 0; \xi_1, \eta_1),$$

$$\text{при } \xi \neq \xi_1,\ \xi \neq \eta_1, \tag{4.3.7}$$

и при $(\xi, \eta) = (\xi_1, \eta_1)$ должно выполнятся условие:

$$G(\xi_1 - 0, \eta_1 - 0; \xi_1, \eta_1) - G(\xi_1 + 0, \eta_1 - 0; \xi_1, \eta_1) +$$

$$+G(\xi_1 + 0, \eta_1 + 0; \xi_1, \eta_1) - G(\xi_1 - 0, \eta_1 + 0; \xi_1, \eta_1) = 1. \tag{4.3.8}$$

4.4 Существование и единственность функции Грина задачи

Теорема 4.4.1 Если решение задачи (4.1.1)-(4.1.3) единственно, то функция $G(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1)$, удовлетворяющая условиям (4.3.1)-(4.3.8), существует и единственна.

Тогда решение задачи (4.1.1)-(4.1.3) можем написать используя функцию Грина этой задачи:

$$u(\xi, \eta) = \iint_\Omega G(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1) f(\xi_1, \eta_1) d\xi_1 d\eta_1, \qquad (\xi, \eta) \in \Omega.$$

Чтобы построить функцию $G(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1)$, которая удовлетворяет условиям (4.3.1)-(4.3.8), разделим область Ω на шесть подобластей $\Omega_k,\ k = \overline{1,6}$. В каждом из этих подобластей функция Грина непрерывна, но при переходе из одной области в другой функция Грина может иметь разрыв.

Запишем оператор L как сумму двух операторов:

$$L = L_1 + Q, \qquad L_1 G = \left(\frac{\partial}{\partial \eta} + a\right)\left(\frac{\partial}{\partial \xi} + b\right) G,$$

$$QG = (c - a_\xi - ab)G,$$

где предполагаем, что L_1^{-1} существует и компактен, Q является ограниченным оператором. Затем получим следующую вспомогательную задачу:

$$L_{1(\xi,\eta)} G(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1) = 0, (\xi, \eta) \in \Omega,$$

$$\text{при } \xi \neq \xi_1,\ \xi \neq \eta_1,\ \eta \neq \xi_1,\ \eta \neq \eta_1, \tag{4.4.1}$$

с условиями (4.3.2)-(4.3.8) и в каждой подобласти Ω ищем решение задачи (4.3.2)-(4.3.8), (4.4.1) в следующем виде:

$$G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)=\int_{\xi}^{\eta}C_1(\eta_2;\xi_1,\eta_1)K_2(\xi,\eta;\eta_2)d\eta_2+$$

$$+K_1(\xi,\eta,\xi)C_1^*(\xi;\xi_1,\eta_1)\,,(\xi,\eta)\in\Omega_1, \quad (4.4.2)$$

$$G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)=\int_{\xi_1}^{\eta}C_2(\eta_2;\xi_1,\eta_1)K_2(\xi,\eta;\eta_2)d\eta_2+$$

$$+K_1(\xi,\eta;\xi_1)C_2^*(\xi;\xi_1,\eta_1),(\xi,\eta)\in\Omega_2, \quad (4.4.3)$$

$$G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)=\int_{\eta_1}^{\eta}C_3(\eta_2;\xi_1,\eta_1)K_2(\xi,\eta;\eta_2)d\eta_2+$$

$$+K_1(\xi,\eta;\eta_1)C_3^*(\xi;\xi_1,\eta_1),(\xi,\eta)\in\Omega_3, \quad (4.4.4)$$

$$G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)=\int_{\xi}^{\eta}C_4(\eta_2;\xi_1,\eta_1)K_3(\xi,\eta;\xi_1,\eta_2)d\eta_2+$$

$$+K_1(\xi,\eta,\xi)C_4^*(\xi;\xi_1,\eta_1),(\xi,\eta)\in\Omega_4, \quad (4.4.5)$$

$$G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)=\int_{\eta_1}^{\eta}C_5(\eta_2;\xi_1,\eta_1)K_3(\xi,\eta;\xi_1,\eta_2)d\eta_2+$$

$$+K_1(\xi,\eta;\eta_1)C_5^*(\xi;\xi_1,\eta_1),(\xi,\eta)\in\Omega_5, \quad (4.4.6)$$

$$G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)=\int_{\xi}^{\eta}C_6(\eta_2;\xi_1,\eta_1)K_3(\xi,\eta;\eta_1,\eta_2)d\eta_2+$$

$$+K_1(\xi,\eta,\xi)C_6^*(\xi;\xi_1,\eta_1),(\xi,\eta)\in\Omega_6, \quad (4.4.7)$$

где

$$K_1(\xi,\eta;\xi_1)=\exp\left(-\int_{\xi_1}^{\eta}a(\xi,s)ds\right),$$

$$K_2(\xi,\eta;\xi_1)=\exp\left(-\int_{0}^{\xi}b(s,\xi_1)ds\right)\exp\left(-\int_{\xi_1}^{\eta}a(\xi,s)ds\right),$$

$$K_3(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)=\exp\left(-\int_{\xi_1}^{\xi} b(s,\eta_1)ds\right)\exp\left(-\int_{\eta_1}^{\eta} a(\xi,s)ds\right),$$

и $K_1,\ K_2\in C^1(\overline{\Omega}\times[0,1]),\ K_3\in C^1(\overline{\Omega}\times\overline{\Omega});\quad C_i^*\in C^1([0,1]\times\overline{\Omega}),\ C_i\in C([0,1])\times\overline{\Omega}),\ i=\overline{1,6}$. Используя условия (5.3.2)-(5.3.8), для неизвесной функции $C_i,\ i=\overline{1,6}$, из (4.4.2)-(4.4.7) получим уравнений:

$$-\int_{\xi_1}^{\xi} C_4(\eta_2;\xi_1,\eta_1)K_{3\xi}(\xi_1,\xi;\xi_1,\eta_2)d\eta_2+\int_{\xi_1}^{\xi} C_2(\eta_2;\xi_1,\eta_1)K_{2\xi}(\xi_1,\xi;\eta_2)d\eta_2+$$

$$+C_2(\xi;\xi_1,\eta_1)K_2(\xi_1,\xi;\xi_1)-C_4(\xi;\xi_1,\eta_1)=0,\xi_1\le\xi\le\eta_1,\qquad(4.4.8)$$

$$-\int_{\eta_1}^{\xi} C_5(\eta_2;\xi_1,\eta_1)K_{3\xi}(\xi_1,\xi;\xi_1,\eta_2)d\eta_2+\int_{\eta_1}^{\xi} C_3(\eta_2;\xi_1,\eta_1)K_{2\xi}(\xi_1,\xi;\eta_2)d\eta_2+$$

$$+C_3(\xi;\xi_1,\eta_1)K_2(\xi_1,\xi;\xi_1)-C_5(\xi;\xi_1,\eta_1)=0,\eta_1\le\xi\le 1,\qquad(4.4.9)$$

$$-\int_{\eta_1}^{\xi} C_6(\eta_2;\xi_1,\eta_1)K_{3\xi}(\xi_1,\xi;\xi_1,\eta_2)d\eta_2+\int_{\eta_1}^{\xi} C_5(\eta_2;\xi_1,\eta_1)K_{3\xi}(\xi_1,\xi;\xi_1,\eta_2)d\eta_2+$$

$$+C_5(\xi;\xi_1,\eta_1)K_3(\eta_1,\xi;\xi_1,\xi)-C_6(\xi;\xi_1,\eta_1)K_3(\eta_1,\xi;\xi_1,\xi)=0,$$

$$\eta_1\le\xi\le 1,\qquad(4.4.10)$$

$$-\alpha\int_{\xi}^{\xi_1} C_1(\eta_2;\xi_1,\eta_1)K_{2\xi}(\xi,\xi;\eta_2)d\eta_2+\int_{0}^{\xi} C_1(\eta_2;\xi_1,\eta_1)K_{2\xi}(0,\xi;\eta_2)d\eta_2-$$

$$-\alpha\int_{\xi_1}^{\eta_1} C_2(\eta_2;\xi_1,\eta_1)K_{2\xi}(\xi,1;\eta_2)d\eta_2-\alpha\int_{\eta_1}^{1} C_3(\eta_2;\xi_1,\eta_1)K_{2\xi}(\xi,1;\eta_2)d\eta_2+,$$

$$+C_1(\xi;\xi_1,\eta_1)(K_2(\xi,1;\xi)+1)=F_1(\xi;\xi_1,\eta_1),0\le\xi\le\xi_1,\qquad(4.4.11)$$

$$-\int_{\xi}^{\xi_1} C_2(\eta_2;\xi_1,\eta_1)K_{2\xi}(0,\xi;\eta_2)d\eta_2+\int_{0}^{\xi_1} C_1(\eta_2;\xi_1,\eta_1)K_{2\xi}(0,\xi;\eta_2)d\eta_2-$$

$$-\alpha\int_{\xi}^{\eta_1} C_4(\eta_2;\xi_1,\eta_1)K_{3\xi}(\xi,1;\xi_1,\eta_2)d\eta_2-\alpha\int_{\eta_1}^{1} C_5(\eta_2;\xi_1,\eta_1)K_{3\xi}(\xi,1;\xi_1,\eta_2)d\eta_2$$

$$+C_2(\xi;\xi_1,\eta_1)+\alpha C_4(\xi;\xi_1,\eta_1)K_3(\xi,1;\xi_1,\xi)=$$

$$= F_2(\xi;\xi_1,\eta_1), \xi_1 \le \xi \le \eta_1, \quad (4.4.12)$$

$$-\int_{\eta_1}^{\xi_1} C_2(\eta_2;\xi_1,\eta_1) K_{2\xi}(0,\xi;\eta_2) d\eta_2 + \int_0^{\xi_1} C_1(\eta_2;\xi_1,\eta_1) K_{2\xi}(0,\xi;\eta_2) d\eta_2 +$$

$$+\int_{\eta_1}^{\xi} C_3(\eta_2;\xi_1,\eta_1) K_{2\xi}(0,\xi;\eta_2) d\eta_2 - \alpha \int_{\xi}^{1} C_6(\eta_2;\xi_1,\eta_1) K_{3\xi}(\xi,1;\xi_1,\eta_2) d\eta_2$$

$$+C_3(\xi;\xi_1,\eta_1) + \alpha C_6(\eta_2;\xi_1,\eta_1) K_3(\xi,1;\xi_1,\xi) =$$

$$= F_3(\xi;\xi_1,\eta_1), \eta_1 \le \xi \le 1, \quad (4.4.13)$$

где

$$F_1(\xi;\xi_1,\eta_1) = \frac{\alpha^2 K_3(\xi_1,1;\xi_1,\eta_1)}{1+\alpha K_{2\xi}(\xi_1,1;\xi_1)} K_{2\xi}(\xi,1;\xi_1), 0 \le \xi \le \xi_1,$$

$$F_2(\xi;\xi_1,\eta_1) = -\frac{\alpha^2 K_3(\xi_1,1;\xi_1,\eta_1)}{1+\alpha K_{2\xi}(\xi_1,1;\xi_1)} K_{2\xi}(0,\xi;\xi_1) +$$

$$+\alpha K_3(\xi,1;\xi_1,\eta_1), \xi_1 \le \xi \le \eta_1,$$

$$F_3(\xi;\xi_1,\eta_1) = -\frac{\alpha K_3(\xi_1,1;\xi_1,\eta_1)}{1+\alpha K_{2\xi}(\xi_1,1;\xi_1)} K_{2\xi}(0,\xi;\xi_1).$$

Переводим все интервалы уравнений (4.4.8)-(4.4.13) на интервал [0,1]. В итоге получим следующую систему уравнений:

$$A\vec{C}(t;\xi_1,\eta_1) + \int_0^1 K(t,\tau;\xi_1,\eta_1)\vec{C}(\tau;\xi_1,\eta_1) d\tau = \vec{F}(t;\xi_1,\eta_1), 0 \le t \le 1,$$

где

$$\vec{C} = \begin{pmatrix} \overline{C_1} \\ \overline{C_2} \\ \overline{C_3} \\ \overline{C_4} \\ \overline{C_5} \\ \overline{C_6} \end{pmatrix}, \qquad \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \overline{F_1} \\ \overline{F_2} \\ \overline{F_3} \end{pmatrix},$$

$$A=\begin{pmatrix} 0 & \overline{K_2}(\xi_1,\eta_1;t) & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{K_2}(\xi_1,\eta_1;t) & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{K_3}(\eta_1,t,\xi_1,t) & -\overline{K_3}(\eta_1,t,\xi_1,t) \\ 1+\alpha\overline{K_1}(\xi_1,1;t) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha\overline{K_3}(\xi_1,\eta_1;1,t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha\overline{K_3}(\xi_1,\eta_1;1,t) \end{pmatrix}$$

Таким образом, если $\det|A|\neq 0$, доказано лемма:

Лемма 4.4.2 Если решение задачи (4.1.1)-(4.1.3) единственно, то функция $G_1(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)$, удовлетворяющая условиям (4.3.2)-(4.3.8), (4.4.1) существует и единственно.

Ищем решение задачи (4.3.1)-(4.3.8) в следующем виде:

$$G=G_1+g, \tag{4.4.14}$$

где $G_1(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)$ –- решение задачи (4.3.2)-(4.3.8), (4.4.1), $g(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)$ является непрерывной функцией. Подставляя (4.4.8) в (4.3.2)-(4.3.8) для функции $g(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)$ получим следующую задачу:

$$L_{(\xi,\eta)}g(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)=-QG_1=f_3,(\xi,\eta)\in\Omega,$$

$$\text{при }\ \xi\neq\xi_1,\ \xi\neq\eta_1,\ \eta\neq\xi_1,\ \eta\neq\eta_1; \tag{4.4.15}$$

$$g(\xi,\xi;\xi_1,\eta_1)=0,0\le\xi\le 1,(\xi_1,\eta_1)\in\Omega; \tag{4.4.16}$$

$$g(0,\xi_0;\xi_1,\eta_1)=\alpha g(\xi_0,1;\xi_1,\eta_1),0\le\xi_0\le 1,(\xi_1,\eta_1)\in\Omega. \tag{4.4.17}$$

Для задачи (4.4.15)-(4.4.17) получили теорему аналогично задаче (4.3.2)-(4.3.8), (4.4.1).

Теорема 4.4.3. Пусть a, b, a_ξ, b_η, $c\in C(\overline{\Omega})$. Если решение задачи (4.4.15)-(4.4.17) единственно, то для любого $f_3\in L_2(\Omega\times\Omega)$ существует решение $g\in W_2^1(\Omega\times\Omega)$, $g_{\xi\eta}\in L_2(\Omega\times\Omega)$ задачи (4.4.15)-(4.4.17).

Таким образом, доказано следующая теорема:

Теорема 4.4.4. Если решение задачи (4.1.1)-(4.1.3) единственно, то функция $G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)$, удовлетворяющая условиям (4.3.1)-(4.3.8), существует и единственна.

Результаты в этом направлений дано в работе [36].

5 О ФУНКЦИИ ГРИНА АСИММЕТРИЧНОЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ С УСЛОВИЕМ НЕЙМАНА

5.1 Постановка задачи

В характеристическом треугольнике $\Omega = \{(\xi, \eta): 0 < \xi < \eta < 1\}$ рассмотрим гиперболическое уравнение второго рода общего вида:

$$Lu = u_{\xi\eta} + a(\xi,\eta)u_\xi + b(\xi,\eta)u_\eta + c(\xi,\eta)u = f(\xi,\eta),\ (\xi,\eta) \in \Omega, \quad (5.1.1)$$

с нелокальной краевой задачей со сдвигом:

$$u(0,\xi_0) = \alpha u(\xi_0, 1),\ 0 \le \xi_0 \le 1, \quad (5.1.2)$$

и на нехарактерной прямой $AB = \{0 \le \xi = \eta \le 1\}$ задается условие Неймана:

$$(u_\xi - u_\eta)(\xi,\xi) = 0,\ 0 \le \xi \le 1, \quad (5.1.3)$$

где $a,\ b,\ a_\xi,\ b_\eta,\ c,\ f \in C(\overline{\Omega})$; α - константа.

5.2 Доказательство существование решения задачи

Представления решения задачи Коши (5.1.1), (5.1.3) будем искать методом Римана:

$$u(\xi,\eta) = \frac{1}{2}\int_\xi^\eta \tau(\xi_1)\left(R_{\xi_1} - R_{\eta_1}\right)(\xi,\eta;\xi_1,\xi_1)d\xi_1 +$$

$$+\int_\xi^\eta \tau(\xi_1)(a-b)(\xi_1,\xi_1)R(\xi,\eta;\xi_1,\xi_1)d\xi_1 -$$

$$-\int_\xi^\eta d\xi_1 \int_{\xi_1}^\eta R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)f(\xi_1,\eta_1)d\eta_1 +$$

$$+\frac{1}{2}\tau(\xi)R(\xi,\eta;\xi,\xi) + \frac{1}{2}\tau(\eta)R(\xi,\eta;\eta,\eta), (\xi,\eta) \in \Omega, \quad (5.2.4)$$

где $R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)$ - функция Римана-Грина уравнения (5.1.1). Предполагаем что

$$1 - \frac{\alpha R(\xi,1;\xi,\xi)}{R(0,\xi;\xi,\xi)} =$$

$$= 1 - \exp\left(-\int_0^\xi b(s,\xi)ds\right)\exp\left(-\int_\xi^1 a(\xi,s)ds\right) = \beta(\xi) \neq 0, \qquad 0 \leq \xi \leq 1,$$

$$\beta(\xi) \cdot \exp\left(\int_0^\xi b(s,\xi)ds\right) = \gamma(\xi), \qquad 0 \leq \xi \leq 1.$$

Тогда, подставляя (5.2.4) в (5.1.2):

$$\tau(\xi) + \frac{1}{\gamma}\int_0^\xi \tau(\xi_1)\left(R_{\xi_1} - R_{\eta_1}\right)(0,\xi;\xi_1,\xi_1)d\xi_1 +$$

$$+\frac{2}{\gamma}\int_0^\xi \tau(\xi_1)(a-b)(\xi_1,\xi_1)(0,\xi;\xi_1,\xi_1)d\xi_1 -$$

$$-\frac{2\alpha}{\gamma}\int_\xi^1 \tau(\xi_1)(a-b)(\xi_1,\xi_1)(\xi,1;\xi_1,\xi_1)d\xi_1 -$$

$$-\frac{\alpha}{\gamma}\int_\xi^1 \tau(\xi_1)\left(R_{\xi_1} - R_{\eta_1}\right)(\xi,1;\xi_1,\xi_1)d\xi_1 +$$

$$+\frac{2\alpha(-\alpha R(0,\xi;0,0) + \alpha R(\xi,1;1,1))}{\gamma M}\int_0^1 \tau(\xi_1)(a-b)(\xi_1,\xi_1)(0,1;\xi_1,\xi_1)d\xi_1 +$$

$$+\frac{\alpha(-\alpha R(0,\xi;0,0) + \alpha R(\xi,1;1,1))}{\gamma M}\int_0^1 \tau(\xi_1)\left(R_{\xi_1} - R_{\eta_1}\right)(\xi_1,\xi_1)(0,1;\xi_1,\xi_1)d\xi_1 =$$

$$= F(\xi;\xi_1,\eta_1), 0 \leq \xi \leq 1, \tag{5.2.5}$$

где

$$F(\xi;\xi_1,\eta_1) = \frac{2}{\gamma}\int_0^\xi d\xi_1 \int_{\xi_1}^\xi R(0,\xi;\xi_1,\eta_1)f(\xi_1,\eta_1)d\eta_1 -$$

$$-\frac{2}{\gamma}\int_\xi^1 d\xi_1 \int_{\xi_1}^1 R(\xi,1;\xi_1,\eta_1)f(\xi_1,\eta_1)d\eta_1 +$$

$$+\frac{2\alpha(-\alpha R(0,\xi;0,0) + \alpha R(\xi,1;1,1))}{\gamma M}\int_0^1 d\xi_1 \int_{\xi_1}^1 R(0,1;\xi_1,\eta_1)f(\xi_1,\eta_1)d\eta_1,$$

$$M = -2\alpha + R(0,1;1,1) + \alpha^2 R(0,1;0,0).$$

Уравнение (5.2.5) является уравнением Фредгольма второго рода. Следовательно, если предположим, что решение $\tau \in C^1([0,1])$ уравнения (5.2.5) единственно, то оно существует.

Теорема 5.2.1. Пусть $a,\ b,\ a_\xi,\ b_\eta,\ c \in C(\overline{\Omega})$. Если решение задачи (5.1.1)-(5.1.3) единственно, тогда для любого $f \in C(\overline{\Omega})$ решение $u \in C^1(\overline{\Omega})$, $u_{\xi\eta} \in C(\overline{\Omega})$ задачи (5.1.1)-(5.1.3) существует.

5.3 Определение функции Грина

Определение 5.3.1 Функцией Грина задачи (5.1.1)-(5.1.3) является функция $G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)$, которая для каждого фиксированного $(\xi_1,\eta_1) \in \Omega$ удовлетворяет однородному уравнению:

$$L_{(\xi,\eta)}G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1) = 0, (\xi,\eta) \in \Omega,$$

$$\text{при } \xi \neq \xi_1,\ \xi \neq \eta_1,\ \eta \neq \xi_1,\ \eta \neq \eta_1, \tag{5.3.1}$$

и следующим условиям на границе:

$$\left(G_\xi - G_\eta\right)(\xi,\xi;\xi_1,\eta_1) = 0, 0 \leq \xi \leq 1, (\xi_1,\eta_1) \in \Omega; \tag{5.3.2}$$

$$G(0,\xi_0;\xi_1,\eta_1) = \alpha G(\xi_0,1;\xi_1,\eta_1), 0 \leq \xi_0 \leq 1, (\xi_1,\eta_1) \in \Omega, \tag{5.3.3}$$

и условиям на характеристиках:

$$G_\eta(\xi_1+0,\eta;\xi_1,\eta_1) + a(\xi_1,\eta)G(\xi_1+0,\eta;\xi_1,\eta_1) =$$

$$= G_\eta(\xi_1-0,\eta;\xi_1,\eta_1) + a(\xi_1,\eta)G(\xi_1-0,\eta;\xi_1,\eta_1),$$

$$\text{при } \eta \neq \xi_1,\ \eta \neq \eta_1; \tag{5.3.4}$$

$$G_\eta(\eta_1+0,\eta;\xi_1,\eta_1) + a(\eta_1,\eta)G(\eta_1+0,\eta;\xi_1,\eta_1) =$$

$$= G_\eta(\eta_1-0,\eta;\xi_1,\eta_1) + a(\eta_1,\eta)G(\eta_1-0,\eta;\xi_1,\eta_1),$$

$$\text{при } \eta \neq \xi_1,\ \eta \neq \eta_1; \tag{5.3.5}$$

$$G_\xi(\xi,\xi_1+0;\xi_1,\eta_1) + b(\xi,\xi_1)G(\xi,\xi_1+0;\xi_1,\eta_1) =$$

$$= G_\xi(\xi,\xi_1-0;\xi_1,\eta_1) + b(\xi,\xi_1)G(\xi,\xi_1-0;\xi_1,\eta_1),$$

$$\text{при } \xi \neq \xi_1,\ \xi \neq \eta_1; \tag{5.3.6}$$

$$G_\xi(\xi,\eta_1+0;\xi_1,\eta_1)+b(\xi,\eta_1)G(\xi,\eta_1+0;\xi_1,\eta_1)=$$

$$=G_\xi(\xi,\eta_1-0;\xi_1,\eta_1)+b(\xi,\eta_1)G(\xi,\eta_1-0;\xi_1,\eta_1),$$

$$\text{при } \xi\neq\xi_1,\ \xi\neq\eta_1, \tag{5.3.7}$$

и при $(\xi,\eta)=(\xi_1,\eta_1)$ должно выполнятся условие

$$G(\xi_1-0,\eta_1-0;\xi_1,\eta_1)-G(\xi_1+0,\eta_1-0;\xi_1,\eta_1)+$$

$$+G(\xi_1+0,\eta_1+0;\xi_1,\eta_1)-G(\xi_1-0,\eta_1+0;\xi_1,\eta_1)=1. \tag{5.3.8}$$

5.4 Существование и единственность функции Грина задачи

Теорема 5.4.1. Если решение задачи (5.1.1)-(5.1.3) единственно, то функция $G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)$, удовлетворяющая условиям (5.3.1)-(5.3.8), существует и единственно.

Тогда решение задачи (5.1.1)-(5.1.3) можем написать используя функцию Грина этой задачи:

$$u(\xi,\eta)=\iint_\Omega G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)f(\xi_1,\eta_1)d\xi_1 d\eta_1, \qquad (\xi,\eta)\in\Omega.$$

Чтобы построить функцию $G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)$, которая удовлетворяет условиям (5.3.1)-(5.3.8), разделим область Ω на шесть подобластей $\Omega_k,\ k=\overline{1,6}$. В каждом из этих подобластей функция Грина непрерывна, но при переходе из одной области в другой функция Грина может иметь разрыв.

Запишем оператор L как сумму двух операторов:

$$L=L_1+Q, \qquad L_1G=\left(\frac{\partial}{\partial\eta}+a\right)\left(\frac{\partial}{\partial\xi}+b\right)G,$$

$$QG=(c-a_\xi-ab)G,$$

где мы предполагаем, что L_1^{-1} существует и компактен, Q является ограниченным оператором. Затем получаем следующую вспомогательную задачу:

$$L_{1(\xi,\eta)}G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)=0,(\xi,\eta)\in\Omega,$$

$$\text{при } \xi\neq\xi_1,\ \xi\neq\eta_1,\ \eta\neq\xi_1,\ \eta\neq\eta_1, \tag{5.4.1}$$

с условиями (5.3.2)-(5.3.8) и в каждой подобласти Ω ищем решение (5.3.2)-(5.3.8), (5.4.1) в следующем виде:

$$G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)=\int_{\xi}^{\eta}C_1(\eta_2;\xi_1,\eta_1)K_2(\xi,\eta;\eta_2)d\eta_2+$$

$$+K_1(\xi,\eta,\xi)C_1^*(\xi;\xi_1,\eta_1)\,,(\xi,\eta)\in\Omega_1, \tag{5.4.2}$$

$$G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)=\int_{\xi_1}^{\eta}C_2(\eta_2;\xi_1,\eta_1)K_2(\xi,\eta;\eta_2)d\eta_2+$$

$$+K_1(\xi,\eta;\xi_1)C_2^*(\xi;\xi_1,\eta_1),(\xi,\eta)\in\Omega_2, \tag{5.4.3}$$

$$G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)=\int_{\eta_1}^{\eta}C_3(\eta_2;\xi_1,\eta_1)K_2(\xi,\eta;\eta_2)d\eta_2+$$

$$+K_1(\xi,\eta;\eta_1)C_3^*(\xi;\xi_1,\eta_1),(\xi,\eta)\in\Omega_3, \tag{5.4.4}$$

$$G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)=\int_{\xi}^{\eta}C_4(\eta_2;\xi_1,\eta_1)K_3(\xi,\eta;\xi_1,\eta_2)d\eta_2+$$

$$+K_1(\xi,\eta,\xi)C_4^*(\xi;\xi_1,\eta_1),(\xi,\eta)\in\Omega_4, \tag{5.4.5}$$

$$G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)=\int_{\eta_1}^{\eta}C_5(\eta_2;\xi_1,\eta_1)K_3(\xi,\eta;\xi_1,\eta_2)d\eta_2+$$

$$+K_1(\xi,\eta;\eta_1)C_5^*(\xi;\xi_1,\eta_1),(\xi,\eta)\in\Omega_5, \tag{5.4.6}$$

$$G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)=\int_{\xi}^{\eta}C_6(\eta_2;\xi_1,\eta_1)K_3(\xi,\eta;\eta_1,\eta_2)d\eta_2+$$

$$+K_1(\xi,\eta,\xi)C_6^*(\xi;\xi_1,\eta_1),(\xi,\eta)\in\Omega_6, \tag{5.4.7}$$

где

$$K_1(\xi,\eta;\xi_1)=\exp\left(-\int_{\xi_1}^{\eta}a(\xi,s)ds\right),$$

$$K_2(\xi,\eta;\xi_1)=\exp\left(-\int_{0}^{\xi}b(s,\xi_1)ds\right)\exp\left(-\int_{\xi_1}^{\eta}a(\xi,s)ds\right),$$

$$K_3(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)=\exp\left(-\int_{\xi_1}^{\xi}b(s,\eta_1)ds\right)\exp\left(-\int_{\eta_1}^{\eta}a(\xi,s)ds\right),$$

$$K_4(\xi,\eta) = 2\exp\left(-\int_0^\eta b(s,\eta)ds\right)\exp\left(-2\int_\eta^\xi a(s,s)ds\right),$$

и $K_1,\ K_2 \in C^1(\overline{\Omega} \times [0,1]),\ K_3 \in C^1(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}), K_4 \in C^1(\overline{\Omega});\ \ C_i^* \in C^1([0,1] \times \overline{\Omega}), C_i \in C([0,1]) \times \overline{\Omega}),\ i = \overline{1,6}$. Используя условия (5.3.2)-(5.3.8), для неизвесной функции $C_i,\ i = \overline{1,6}$, из (5.4.2)-(5.4.7) получим уравнений:

$$-\int_{\xi_1}^{\xi} C_4(\eta_2;\xi_1,\eta_1)K_{3\xi}(\xi_1,\xi;\xi_1,\eta_2)d\eta_2 + \int_{\xi_1}^{\xi} C_2(\eta_2;\xi_1,\eta_1)K_{2\xi}(\xi_1,\xi;\eta_2)d\eta_2 +$$

$$+C_2(\xi;\xi_1,\eta_1)K_2(\xi_1,\xi;\xi) - C_4(\xi;\xi_1,\eta_1) = 0, \xi_1 \le \xi \le \eta_1, \tag{5.4.8}$$

$$-\int_{\eta_1}^{\xi} C_5(\eta_2;\xi_1,\eta_1)K_{3\xi}(\xi_1,\xi;\xi_1,\eta_2)d\eta_2 + \int_{\eta_1}^{\xi} C_3(\eta_2;\xi_1,\eta_1)K_{2\xi}(\xi_1,\xi;\eta_2)d\eta_2 +$$

$$+C_3(\xi;\xi_1,\eta_1)K_2(\xi_1,\xi;\xi) - C_5(\xi;\xi_1,\eta_1) = 0, \eta_1 \le \xi \le 1, \tag{5.4.9}$$

$$-\int_{\eta_1}^{\xi} C_6(\eta_2;\xi_1,\eta_1)K_{3\xi}(\eta_1,\xi;\xi_1,\eta_2)d\eta_2 + \int_{\eta_1}^{\xi} C_5(\eta_2;\xi_1,\eta_1)K_{3\xi}(\eta_1,\xi;\xi_1,\eta_2)d\eta_2 +$$

$$+C_5(\xi;\xi_1,\eta_1)K_3(\eta_1,\xi;\xi_1,\xi) - C_6(\xi;\xi_1,\eta_1) = 0, \eta_1 \le \xi \le 1, \tag{5.4.10}$$

$$\int_0^{\xi} C_1(\eta_2;\xi_1,\eta_1)\Big(K_{2\xi}(0,\xi;\eta_2) - \alpha K_{1\xi}(\xi;1)K_4(0,\xi;\eta_2)$$
$$- \alpha K_1(\xi;1)K_{4\xi}(0,\xi;\eta_2)\Big)d\eta_2 -$$

$$-\alpha\int_{\xi}^{\xi_1} C_1(\eta_2;\xi_1,\eta_1)K_{2\xi}(\xi,1;\eta_2)d\eta_2 +$$

$$+\alpha\int_{\xi_1}^{\eta_1} C_2(\eta_2;\xi_1,\eta_1)\Big(K_2(0,1;\eta_2)T_1(\xi) - K_{2\xi}(\xi,1;\eta_2)\Big)d\eta_2 -$$

$$-\alpha\int_{1}^{\eta_1} C_2(\eta_2;\xi_1,\eta_1)\Big(K_2(0,1;\eta_2)T_1(\xi) - K_{2\xi}(\xi,1;\eta_2)\Big)d\eta_2 +$$

$$+C_1(\xi;\xi_1,\eta_1)(-K_2(\xi,1;\xi)+1) = F_1(\xi;\xi_1,\eta_1), 0 \le \xi \le \xi_1, \tag{5.4.11}$$

$$-\int_{\xi}^{\xi_1} C_2(\eta_2;\xi_1,\eta_1)K_{2\xi}(0,\xi;\eta_2)d\eta_2 - \alpha\int_{\xi}^{\xi_1} C_4(\eta_2;\xi_1,\eta_1)T_3(\xi,\eta_2)d\eta_2 -$$

$$-\frac{\alpha}{2}\int_{\eta_1}^{\xi_1} C_4(\eta_2;\xi_1,\eta_1)T_3(\xi,\eta_2)K_3(\xi_1,\xi_1;\xi_1,\eta_2)d\eta_2 -$$

$$-\alpha\int_{\eta_1}^{\xi_1} C_2(\eta_2;\xi_1,\eta_1)T_2(\xi,\xi_1)K_3(\xi_1,\xi_1;\xi_1,\eta_2)d\eta_2 +$$

$$+\alpha\int_{\eta_1}^{1} C_3(\eta_2;\xi_1,\eta_1)T_2(\xi,\xi_1)K_2(0,1;\eta_2)d\eta_2 +$$

$$+\int_{0}^{\xi_1} C_1(\eta_2;\xi_1,\eta_1)\Bigg(K_{2\xi}(0,\xi;\eta_2) + \alpha K_2(0,1;\eta_2)T_2(\xi,\xi_1) - \frac{K_2(0,\xi_1;\eta_2)T_3(\xi,\xi_1)}{2K_1(\xi,1)}\Bigg)d\eta_2 +$$

$$+\int_{\eta_1}^{1} C_5(\eta_2;\xi_1,\eta_1)\left(-K_{3\xi}(\xi,1;\xi_1,\eta_2) + \frac{K_\xi(\xi_1,\xi_1;\xi_1,\eta_2)T_3(\xi,\xi_1)}{2K_1(\xi,1)}\right)d\eta_2 +$$

$$+C_2(\xi;\xi_1,\eta_1) + \alpha C_4(\xi;\xi_1,\eta_1)\big(K_3(\xi,1;\xi_1,\xi) - K_1(\xi;1)K_4(\xi_1,\xi,\xi\ )\big) =$$

$$= F_2(\xi;\xi_1,\eta_1), \xi_1 \le \xi \le \eta_1, \qquad (5.4.12)$$

$$\int_{\eta_1}^{\xi} C_3(\eta_2;\xi_1,\eta_1)K_{2\xi}(0,\xi;\eta_2)d\eta_2 + \alpha\int_{\xi}^{\eta_1} C_6(\eta_2;\xi_1,\eta_1)T_4(\xi,\eta_2)d\eta_2 -$$

$$-\alpha\int_{\xi}^{1} C_6(\eta_2;\xi_1,\eta_1)K_{3\xi}(\xi,1;\eta_1,\eta_2)d\eta_2 +$$

$$+\alpha\int_{\eta_1}^{1} C_3(\eta_2;\xi_1,\eta_1)K_2(0,1;\eta_2)T_5(\xi,\eta_1)d\eta_2 +$$

$$+\frac{\alpha}{2}\int_{\eta_1}^{1} C_6(\eta_2;\xi_1,\eta_1)K_3(\eta_1,\eta_1;\eta_1,\eta_2)T_4(\xi,\eta_1)d\eta_2 +$$

$$+\int_{0}^{\xi_1} C_1(\eta_2;\xi_1,\eta_1)\Bigg(K_{2\xi}(0,\xi;\eta_2) + \alpha K_2(0,1;\eta_2)T_5(\xi,\eta_1) - \frac{K_2(0,\eta_1;\eta_2)T_4(\xi,\eta_1)}{2K_1(\eta_1,1)}\Bigg)d\eta_2 -$$

$$-\int_{\eta_1}^{\xi_1} C_1(\eta_2;\xi_1,\eta_1)\left(K_{2\xi}(0,\xi;\eta_2)+\alpha K_2(0,1;\eta_2)T_5(\xi,\eta_1)\right.$$

$$\left.-\frac{K_2(0,\eta_1;\eta_2)T_4(\xi,\eta_1)}{2K_1(\eta_1,1)}\right)d\eta_2+$$

$$+C_3(\xi;\xi_1,\eta_1)+\alpha C_6(\eta_2;\xi_1,\eta_1)\big(K_3(\xi,1;\eta_1,\xi)-K_1(\xi;1)K_4(\eta_1,\xi,\xi\ )\big)=$$

$$=F_3(\xi;\xi_1,\eta_1),\eta_1\le\xi\le 1, \qquad (5.4.13)$$

где

$$F_1(\xi;\xi_1,\eta_1)=\frac{\alpha^2K_3(\eta_1,1;\xi_1,\eta_1)}{1-\alpha K_2(\xi_1,1;\xi_1)}\Big(K_{2\xi}(\xi,1;\xi_1)-T_1(\xi)K_2(0,1;\xi_1)\Big)+$$

$$+\frac{\alpha^2K_3(\eta_1,1;\xi_1,\eta_1)}{1-\alpha K_2(\xi_1,1;\eta_1)}\Big(K_{2\xi}(\xi,1;\eta_1)-T_1(\xi)K_2(0,1;\eta_1)\Big),$$

$$F_2(\xi;\xi_1,\eta_1)=-\frac{\alpha^2K_3(\eta_1,1;\xi_1,\eta_1)}{1-\alpha K_2(\xi_1,1;\eta_1)}K_2(0,1;\eta_1)T_2(\xi,\xi_1)+$$

$$+\frac{\alpha K_3(\eta_1,1;\xi_1,\eta_1)}{1-\alpha K_2(\xi_1,1;\xi_1)}\left(-K_{2\xi}(0,\xi;\xi_1)-\alpha K_2(0,1;\xi_1)T_2(\xi,\xi_1)+\frac{1}{2}T_3(\xi,\xi_1)\right)-$$

$$-\frac{\alpha}{1-\alpha K_2(\xi_1,1;\eta_1)}\left(-K_{3\xi}(\xi,1;\xi_1,\eta_1)+\frac{1}{2}K_3(\xi_1,1;\xi_1,\eta_1)T_3(\xi,\xi_1)\right),$$

$$F_3(\xi;\xi_1,\eta_1)=\frac{\alpha K_3(\eta_1,1;\xi_1,\eta_1)}{1-\alpha K_2(\xi_1,1;\xi_1)}\left(-K_{2\xi}(0,\xi;\xi_1)-\alpha K_2(0,1;\xi_1)T_5(\xi,\eta_1)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}T_4(\xi,\eta_1)\frac{K_2(0,\eta_1;\xi_1)}{K_1(0,1)}\right)+$$

$$+\frac{\alpha K_3(\eta_1,1;\xi_1,\eta_1)}{1-\alpha K_2(\xi_1,1;\eta_1)}\left(-K_{2\xi}(0,\xi;\eta_1)-\alpha K_2(0,1;\eta_1)T_5(\xi,\eta_1)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2K_1(\eta_1,1)}T_4(\xi,\eta_1)\right),$$

$$T_1(\xi)=\frac{1}{1-\alpha K_1(0,1)}\frac{d}{d\xi}\left(K_1(0,\xi)-\frac{\alpha}{2}K_1(\xi,1)K_4(0,\xi,0)\right),$$

$$T_2(\xi,\xi_1)=\frac{1}{1-\alpha K_1(0,1)}\frac{d}{d\xi}\left(K_1(0,\xi)-\frac{1}{2}K_1(0,\xi_1)K_1(\xi,1)K_4(\xi_1,\xi,\xi_1)\right),$$

$$T_3(\xi,\xi_1)=\frac{d}{d\xi}\big(K_1(\xi,1)K_4(\xi_1,\xi,\xi_1)\big),$$

$$T_4(\xi,\eta_1)=\frac{d}{d\xi}\big(K_1(\xi,1)K_4(\eta_1,\xi,\eta_1)\big),$$

$$T_5(\xi,\eta_1)=\frac{1}{1-\alpha K_1(0,1)}\frac{d}{d\xi}\left(K_1(0,\xi)-\frac{1}{2}K_1(0,\eta_1)K_1(\xi,1)K_4(\eta_1,\xi,\eta_1)\right).$$

В итоге получим следующую систему уравнений:

$$B\vec{C}(t;\xi_1,\eta_1)+\int_0^1 K(t,\tau;\xi_1,\eta_1)\vec{C}(\tau;\xi_1,\eta_1)d\tau=\vec{F}(t;\xi_1,\eta_1),0\le t\le 1,$$

где

$$\vec{C}=\begin{pmatrix}\overline{C_1}\\ \overline{C_2}\\ \overline{C_3}\\ \overline{C_4}\\ \overline{C_5}\\ \overline{C_6}\end{pmatrix},\qquad \vec{F}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\ \overline{F_1}\\ \overline{F_2}\\ \overline{F_3}\end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix}b_{11}&0&0&0&0&0\\0&1&b_{23}&0&0&0\\0&b_{32}&0&-1&0&0\\0&0&1&0&0&b_{46}\\0&0&b_{53}&0&-1&0\\0&0&0&0&b_{65}&-1\end{pmatrix},$$

$$b_{11}=-K_2(s_1,1;s_1)+1,b_{32}=K_2(\xi_1,s_2,s_2),$$

$$b_{23}=\alpha\big(K_3(s_2,1;\xi_1,s_2)-K_1(s_2,1)K_1(\xi,1)K_4(\xi_1,s_2,s_2)\big),$$

$$b_{46}=\alpha\big(K_3(s_3,1;\eta_1,s_3)-K_1(s_3,1)K_1(\xi,1)K_4(\eta_1,s_3,s_3)\big),$$

$$b_{53}=K_2(\xi_1,s_3,s_3),b_{65}=K_3(\eta_1,s_3;\xi_1,s_3),$$

$$0\le s_1\le\xi_1,\xi_1\le s_2\le\eta_1,\eta_1\le s_3\le 1.$$

$$\det|B| = 1 + \alpha \exp\left(-\int_0^t b(s,t)ds\right)\exp\left(-\int_t^1 a(t,s)ds\right) \neq 0, \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

Таким образом, если $\det|B| \neq 0$, доказано лемма:

Лемма 5.4.2 Если решение задачи (5.1.1)-(5.1.3) единственно, то функция $G_1(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)$, удовлетворяющая условиям (5.3.2)-(5.3.8), (5.4.1) существует и единственно.

Ищем решение задачи (5.3.1)-(5.3.8) в следующем виде:

$$G = G_1 + g, \tag{5.4.8}$$

где $G_1(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)$ - решение задачи (5.3.2)-(5.3.8), (5.4.1), $g(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)$ является непрерывной функцией. Подставляя (5.4.8) в (5.3.2)-(5.3.8) для функции $g(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)$, получим следующую задачу:

$$L_{(\xi,\eta)}g(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1) = -QG_1 = f_3, (\xi,\eta) \in \Omega,$$

$$\text{при } \xi \neq \xi_1,\ \xi \neq \eta_1,\ \eta \neq \xi_1,\ \eta \neq \eta_1; \tag{5.4.9}$$

$$(g_\xi - g_\eta)(\xi,\xi;\xi_1,\eta_1) = 0, 0 \leq \xi \leq 1, (\xi_1,\eta_1) \in \Omega; \tag{5.4.10}$$

$$g(0,\xi_0;\xi_1,\eta_1) = \alpha g(\xi_0,1;\xi_1,\eta_1), 0 \leq \xi_0 \leq 1, (\xi_1,\eta_1) \in \Omega. \tag{5.4.11}$$

Для задачи (5.4.9)-(5.4.11) получили теорему аналогично задаче (5.1.1)-(5.1.3).

Теорема 5.4.3 Пусть $a,\ b,\ a_\xi,\ b_\eta,\ c \in C(\overline{\Omega})$. Если решение задачи (5.4.9)-(5.4.11) единственно, то для любого $f_3 \in L_2(\Omega \times \Omega)$ существует решение $g \in W_2^1(\Omega \times \Omega),\ g_{\xi\eta} \in L_2(\Omega \times \Omega)$ задачи (5.4.9)-(5.4.11).

Таким образом, доказано следующая теорема:

Теорема 5.4.4. Если решение задачи (5.1.1)-(5.1.3) единственно, то функция $G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)$, удовлетворяющая условиям (5.3.1)-(5.3.8), существует и единственно.

6 ПОСТРОЕНИЕ ПРИМЕРА КОРРЕКТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ, ИМЕЮЩЕЙ «НЕКЛАССИЧЕСКИЙ» ВИД ФУНКЦИИ ГРИНА

6.1 Пример 1

В характеристическом треугольнике $\Omega = \{(\xi, \eta): 0 < \xi < \eta < 1\}$ рассмотрено волновое уравнение:

$$Lu = u_{\xi\eta} = f(\xi, \eta),\ (\xi, \eta) \in \Omega. \tag{6.1.1}$$

Для уравнения (6.1.1) рассмотрена краевая задача:

$$u(0, \xi_0) = \alpha u(1 - \xi_0, 1),\ 0 \le \xi_0 \le 1, \tag{6.1.2}$$

где $f \in C(\Omega)$, α - заданная константа. На нехарактеристической линии $AB = \{0 \le \xi = \eta \le 1\}$ задаётся краевое условие первого рода

$$u(\xi, \xi) = 0, \quad 0 \le \xi \le 1. \tag{6.1.3}$$

Такая задача для случая вырождающегося гиперболического уравнения впервые была рассмотрена в работе Т.Ш. Кальменова, Б.Н. Биярова [37].

Покажем, что при $\alpha^2 \neq 1$ задача (6.1.1)-(6.1.3) корректна. Решение задачи (6.1.1), (6.1.3) ищем в следующем виде:

$$u(\xi, \eta) = \mu(\xi) + \mu(\eta) - \int_\xi^\eta d\xi_1 \int_{\xi_1}^\eta f(\xi_1, \eta_1) d\eta_1, (\xi, \eta) \in \Omega. \tag{6.1.4}$$

Подставляя (6.1.4) в (6.1.2) получим:

$$u(\xi, \eta) = -\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}\int_\xi^\eta d\xi_1 \int_\eta^1 f(\xi_1, \eta_1) d\eta_1 + \frac{1}{1-\alpha^2}\int_0^\xi d\xi_1 \int_\xi^\eta f(\xi_1, \eta_1) d\eta_1 +$$

$$+\frac{\alpha}{1-\alpha^2}\int_0^{1-\eta} d\xi_1 \int_{1-\eta}^{1-\xi} f(\xi_1, \eta_1) d\eta_1 - \frac{\alpha}{1-\alpha^2}\int_{1-\eta}^{1-\xi} d\xi_1 \int_{1-\xi}^{1} f(\xi_1, \eta_1) d\eta_1.$$

Далее нами впервые дано определение функции Грина задачи (6.1.1)-(6.1.3).

Определение 6.1.1 Функцией Грина задачи (5.1)-(5.3) назовем функцию $G(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1)$, которая при любом фиксированном $(\xi_1, \eta_1) \in \Omega$, удовлетворяет однородному уравнению

$$L_{(\xi,\eta)} G = 0,\ (\xi, \eta) \in \Omega,\ \xi \neq \xi_1,\ \xi \neq \eta_1,\ \eta \neq \eta_1,\ \eta \neq \xi_1, \tag{6.1.5}$$

и следующим граничным условиям:

$$G(\xi, \xi; \xi_1, \eta_1) = 0, 0 \le \xi \le 1; \tag{6.1.6}$$

$$G(0, \xi_0; \xi_1, \eta_1) = \alpha G(1-\xi_0, 1; \xi_1, \eta_1),\ 0 \le \xi_0 \le 1; \tag{6.1.7}$$

и условиям на характеристиках:

$$G_\eta(\xi_1+0, \eta; \xi_1, \eta_1) = G_\eta(\xi_1-0, \eta; \xi_1, \eta_1),$$

$$\eta \ne \xi_1,\ \eta \ne \eta_1,\ \ \eta \ne 1-\xi_1,\ \eta \ne 1-\eta_1; \tag{6.1.8}$$

$$G_\eta(\eta_1+0, \eta; \xi_1, \eta_1) = G_\eta(\eta_1-0, \eta; \xi_1, \eta_1),$$

$$\eta \ne \xi_1,\ \eta \ne \eta_1,\ \ \eta \ne 1-\xi_1,\ \eta \ne 1-\eta_1; \tag{6.1.9}$$

$$G_\eta(1-\eta_1+0, \eta; \xi_1, \eta_1) = G_\eta(1-\eta_1-0, \eta; \xi_1, \eta_1),$$

$$\eta \ne \xi_1,\ \eta \ne \eta_1,\ \ \eta \ne 1-\xi_1,\ \eta \ne 1-\eta_1; \tag{6.1.10}$$

$$G_\eta(1-\xi_1+0, \eta; \xi_1, \eta_1) = G_\eta(1-\xi_1-0, \eta; \xi_1, \eta_1),$$

$$\eta \ne \xi_1,\ \eta \ne \eta_1,\ \ \eta \ne 1-\xi_1,\ \eta \ne 1-\eta_1; \tag{6.1.11}$$

$$G_\xi(\xi, \eta_1+0; \xi_1, \eta_1) = G_\xi(\xi, \eta_1-0; \xi_1, \eta_1),$$

$$\xi \ne \xi_1,\ \xi \ne \eta_1,\ \ \xi \ne 1-\xi_1,\ \xi \ne 1-\eta_1; \tag{6.1.12}$$

$$G_\xi(\xi, \xi_1+0; \xi_1, \eta_1) = G_\xi(\xi, \xi_1-0; \xi_1, \eta_1),$$

$$\xi \ne \xi_1,\ \xi \ne \eta_1,\ \ \xi \ne 1-\xi_1,\ \xi \ne 1-\eta_1; \tag{6.1.13}$$

$$G_\xi(\xi, 1-\eta_1+0; \xi_1, \eta_1) = G_\xi(\xi, 1-\eta_1-0; \xi_1, \eta_1),$$

$$\xi \ne \xi_1,\ \xi \ne \eta_1,\ \ \xi \ne 1-\xi_1,\ \xi \ne 1-\eta_1; \tag{6.1.14}$$

$$G_\xi(\xi, 1-\xi_1+0; \xi_1, \eta_1) = G_\xi(\xi, 1-\xi_1-0; \xi_1, \eta_1),$$

$$\xi \ne \xi_1,\ \xi \ne \eta_1,\ \ \xi \ne 1-\xi_1,\ \xi \ne 1-\eta_1; \tag{6.1.15}$$

$$G(\xi_1-0, \eta_1-0; \xi_1, \eta_1) - G(\xi_1-0, \eta_1+0; \xi_1, \eta_1) -$$

$$-G(\xi_1+0, \eta_1-0; \xi_1, \eta_1) - G(\xi_1+0, \eta_1+0; \xi_1, \eta_1) = 1. \tag{6.1.16}$$

$$G(1-\eta_1-0, 1-\xi_1-0; \xi_1, \eta_1) - G(1-\eta_1+0, 1-\xi_1-0; \xi_1, \eta_1) -$$

$$-G(1-\eta_1-0{,}1-\xi_1+0;\xi_1,\eta_1)+$$

$$+G(1-\eta_1+0{,}1-\xi_1+0;\xi_1,\eta_1)=0; \qquad (6.1.17)$$

При $\eta_1<1/2$ или $\xi_1>1/2$:

$$-G(\eta_1-0{,}1-\xi_1-0;\xi_1,\eta_1)+G(\eta_1-0,1-\xi_1+0;\xi_1,\eta_1)+$$

$$+G(\eta_1+0{,}1-\xi_1-0;\xi_1,\eta_1)-G(\eta_1+0,1-\xi_1+0;\xi_1,\eta_1)=0. \qquad (6.1.18)$$

При $\eta_1<1/2$ или $\xi_1<1/2,\ \eta_1>1/2$:

$$G(\xi_1-0,1-\eta_1+0;\xi_1,\eta_1)-G(\xi_1-0{,}1-\eta_1-0;\xi_1,\eta_1)+$$

$$+G(\xi_1+0{,}1-\eta_1-0;\xi_1,\eta_1)-G(\xi_1+0,1-\eta_1+0;\xi_1,\eta_1)=0. \qquad (6.1.19)$$

При $\xi_1>1/2$ или $\xi_1<1/2,\ \eta_1>1/2$:

$$G(1-\xi_1-0,\eta_1+0;\xi_1,\eta_1)-G(1-\xi_1-0,\eta_1-0;\xi_1,\eta_1)+$$

$$+G(1-\xi_1+0,\eta_1-0;\xi_1,\eta_1)-G(1-\xi_1+0,\eta_1+0;\xi_1,\eta_1)=0. \qquad (6.1.20)$$

Определение функции Грина задачи (6.1.1)-(6.1.3), как видно, существенно отличается от определения функций Грина всех предыдущих задач тем, что функция Грина этой задачи имеет скачки на восьми характеристиках.

Теорема 6.1.2 Если $\alpha^2\neq 1$, тогда функция $G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)$, которая удовлетворяет условиям (6.1.5)-(6.1.20), существует и единственна.

При доказательстве теоремы 6.1.2 выделены пятнадцать подобластей Ω_k области Ω, $k=\overline{1{,}15}$ и в каждой подобласте функция Грина ищется в следующем виде:

$$G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)=\varphi_i-\psi_i, i=\overline{1{,}15}. \qquad (6.1.21)$$

Далее подставим (6.1.21) в (6.1.6)-(6.1.20). В итоге получим функцию Грина задачи (6.1.1)-(6.1.3). в явном виде и она имеет следующий вид:

при $\xi_1>1/2$:

$$G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)=0, \qquad (\xi,\eta)\in\Omega_1,\Omega_3,\Omega_5,\Omega_6,\Omega_{10},\Omega_{12},\Omega_{13},\Omega_{15};$$

$$G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)=\frac{\alpha}{1-\alpha^2}, \qquad (\xi,\eta)\in\Omega_2;$$

$$G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)=\frac{1}{1-\alpha^2},\qquad (\xi,\eta)\in\Omega_4,\Omega_{11};$$

$$G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)=-\frac{\alpha}{1-\alpha^2},\qquad (\xi,\eta)\in\ \Omega_7,\Omega_9;$$

$$G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)=\frac{1}{1+\alpha},\qquad (\xi,\eta)\in\Omega_8;$$

$$G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)=-\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2},\qquad (\xi,\eta)\in\Omega_{14}.$$

при $\eta_1<1/2$:

$$G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)=0,\qquad (\xi,\eta)\in\Omega_1,\Omega_3,\Omega_5,\Omega_6,\Omega_{10},\Omega_{12},\Omega_{13},\Omega_{15};$$

$$G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)=\frac{1}{1-\alpha^2},\qquad (\xi,\eta)\in\Omega_2;$$

$$G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)=\frac{\alpha}{1-\alpha^2},\qquad (\xi,\eta)\in\Omega_4,\Omega_{11};$$

$$G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)=-\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2},\qquad (\xi,\eta)\in\Omega_7,\Omega_9,\Omega_{14};$$

$$G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)=\frac{-\alpha}{1-\alpha},\qquad (\xi,\eta)\in\Omega_8.$$

при $\xi_1<1/2$, $\eta_1>1/2$:

$$G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)=0,\qquad (\xi,\eta)\in\Omega_1,\Omega_5,\Omega_6,\Omega_8,\Omega_{10},\Omega_{13},\Omega_{15};$$

$$G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)=\frac{\alpha}{1-\alpha^2},\qquad (\xi,\eta)\in\Omega_2,\Omega_4;$$

$$G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)=\frac{1}{1-\alpha},\qquad (\xi,\eta)\in\Omega_3;$$

$$G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)=\frac{\alpha}{1-\alpha^2},\qquad (\xi,\eta)\in\Omega_7;$$

$$G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)=-\frac{\alpha}{1-\alpha^2},\qquad (\xi,\eta)\in\ \Omega_{11};$$

$$G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)=-\frac{\alpha}{1-\alpha},\qquad (\xi,\eta)\in\Omega_{12};$$

$$G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1) = -\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}, \qquad (\xi,\eta) \in \Omega_{14}.$$

Из определения 6.1.1 легко видеть, что функция Грина задачи (6.1.1)-(6.1.3) имеет «неклассический» вид, потому что имеет разрывы на восьми характеристиках.

6.2 Пример 2

В характеристическом треугольнике $\Omega = \{(\xi,\eta): 0 < \xi < \eta < 1\}$ рассмотрено волновое уравнение

$$Lu = u_{\xi\eta} = f(\xi,\eta),\ (\xi,\eta) \in \Omega. \qquad (6.2.1)$$

Для уравнения (6.2.1) рассмотрена краевая задача

$$u(0,\eta) = 0,\ 0 \le \eta \le a, \qquad (6.2.2)$$

$$u(\xi,1) = 0,\ a \le \xi \le 1, \qquad (6.2.3)$$

где $f \in C(\Omega)$, a - заданная константа. На нехарактеристической линии $AB = \{0 \le \xi = \eta \le 1\}$ задаётся краевое условие первого рода

$$u(\xi,\xi) = 0, \quad 0 \le \xi \le 1. \qquad (6.2.4)$$

Покажем, что задача (6.2.1)-(6.2.4) корректна. Решение задачи (6.2.1), (6.2.4) ищем в следующем виде:

$$u(\xi,\eta) = \varphi(\xi) - \varphi(\eta) + \int_0^\xi d\xi_1 \int_\xi^\eta f(\xi_1,\eta_1)d\eta_1, (\xi,\eta) \in \Omega. \qquad (6.2.5)$$

Подставляя (6.2.5) в (6.2.2) получим:

$$\varphi(t) = \varphi(0), 0 \le t \le a.$$

Также подставляя (6.2.5) в (6.2.3) получим:

$$\varphi(t) = \varphi(1) - \int_0^t d\xi_1 \int_t^1 f(\xi_1,\eta_1)d\eta_1, \qquad a \le t \le 1.$$

Далее получим решение задачи в трех случаях:

$$u(\xi,\eta) = \int_0^\xi d\xi_1 \int_\xi^\eta f(\xi_1,\eta_1)d\eta_1, 0 \le \xi \le a, 0 \le \eta \le a,$$

$$u(\xi,\eta)=\int_{\xi}^{\eta}d\xi_1\int_{\eta}^{1}f(\xi_1,\eta_1)d\eta_1, a\le\xi\le 1, a\le\eta\le 1,$$

$$u(\xi,\eta)=\int_{0}^{\eta}d\xi_1\int_{\eta}^{1}f(\xi_1,\eta_1)d\eta_1+$$

$$+\int_{0}^{\xi}d\xi_1\int_{\xi}^{\eta}f(\xi_1,\eta_1)d\eta_1-\int_{0}^{a}d\xi_1\int_{a}^{1}f(\xi_1,\eta_1)d\eta_1, 0\le\xi\le a, a\le\eta\le 1.$$

Определение 6.2.1 Функцией Грина задачи (6.2.1)-(6.2.4) назовем функцию $G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)$, которая при любом фиксированном $(\xi_1,\eta_1)\in\Omega$, удовлетворяет однородному уравнению

$$L_{(\xi,\eta)}G=0,\ (\xi,\eta)\in\Omega,\ \xi\ne\xi_1,\ \xi\ne\eta_1,\ \eta\ne\eta_1,\ \eta\ne\xi_1, \qquad (6.2.6)$$

и следующим граничным условиям:

$$G(\xi,\xi;\xi_1,\eta_1)=0, 0\le\xi\le 1; \qquad (6.2.7)$$

$$G(0,\eta;\xi_1,\eta_1)=0, 0\le\eta\le a; \qquad (6.2.8)$$

$$G(\xi,1;\xi_1,\eta_1)=0, a\le\xi\le 1; \qquad (6.2.9)$$

и условиям на характеристиках:

$$G_\eta(\xi_1+0,\eta;\xi_1,\eta_1)=G_\eta(\xi_1-0,\eta;\xi_1,\eta_1),$$

$$\eta\ne\xi_1,\ \eta\ne\eta_1; \qquad (6.2.10)$$

$$G_\eta(\eta_1+0,\eta;\xi_1,\eta_1)=G_\eta(\eta_1-0,\eta;\xi_1,\eta_1),$$

$$\eta\ne\xi_1,\ \eta\ne\eta_1; \qquad (6.2.11)$$

$$G_\xi(\xi,\eta_1+0;\xi_1,\eta_1)=G_\xi(\xi,\eta_1-0;\xi_1,\eta_1),$$

$$\xi\ne\xi_1,\ \xi\ne\eta_1; \qquad (6.2.12)$$

$$G_\xi(\xi,\xi_1+0;\xi_1,\eta_1)=G_\xi(\xi,\xi_1-0;\xi_1,\eta_1),$$

$$\xi\ne\xi_1,\ \xi\ne\eta_1; \qquad (6.2.13)$$

$$G(\xi_1-0,\eta_1-0;\xi_1,\eta_1)-G(\xi_1-0,\eta_1+0;\xi_1,\eta_1)-$$

$$-G(\xi_1+0,\eta_1-0;\xi_1,\eta_1)-G(\xi_1+0,\eta_1+0;\xi_1,\eta_1)=1. \qquad (6.2.14)$$

Теорема 6.2.2 Функция $G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)$, которая удовлетворяет условиям (6.2.6)-(6.2.14), существует и единственна.

При доказательстве теоремы 6.1.2 выделены десять подобластей Ω_k области Ω, $k=\overline{1,10}$ и в каждой подобласте функция Грина ищется в следующем виде:

$$G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)=\varphi_i-\psi_i, i=\overline{1,10}. \qquad (6.2.15)$$

Далее подставим (6.2.15) в (6.2.7)-(6.2.14). В итоге получим функцию Грина задачи (6.2.1)-(6.2.4), в явном виде и она имеет следующий вид:
при $0\le\eta\le a,\ 0\le\xi\le a$:

$$G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)=0, \qquad (\xi,\eta)\in\Omega_1,\Omega_3,\Omega_4,\Omega_5,\Omega_6,\Omega_7,\Omega_8,\Omega_9,\Omega_{10};$$

$$G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)=1, \qquad (\xi,\eta)\in\Omega_2.$$

при $a\le\eta\le 1,\ a\le\xi\le 1$:

$$G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)=0, \qquad (\xi,\eta)\in\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3,\Omega_4,\Omega_5,\Omega_6,\Omega_7,\Omega_8,\Omega_{10};$$

$$G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)=1, \qquad (\xi,\eta)\in\Omega_9.$$

при $a\le\eta\le 1,\ 0\le\xi\le a$:

$$G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)=0, \qquad (\xi,\eta)\in\Omega_1,\Omega_3,\Omega_4,\Omega_5,\Omega_7,\Omega_8,\Omega_{10};$$

$$G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)=1, \qquad (\xi,\eta)\in\Omega_2,\Omega_9,$$

$$G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)=-1, \qquad (\xi,\eta)\in\Omega_6.$$

7 ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОБЪЕМНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА В ОБЛАСТИ С КРИВОЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЦЕЙ

В данном разделе исследован одномерный объемный гиперболический потенциал в области с криволинейной границей. В качестве ядра гиперболического потенциала выбрано фундаментальное решение задачи Коши. Хорошо известно, что в этом случае объемный гиперболический потенциал удовлетворяет однородному начальному условию. Построено граничные условия, которым удовлетворяет гиперболический объемный потенциал на боковых границах области. Показано, что сформулированная начально-краевая задача имеет единственное классическое решение.

В [38], метод Римана-Грина используется для получения общих решений задач Коши для гиперболического уравнения в произвольной области. Риман впервые занялся такими задачами в двадцатом веке [39]. После Римана, Дарбу добился большого прогресса в этой области. В этих работах были заложены основы для представления решений гиперболических уравнений в интегральной форме.

Объемный эллиптический потенциал широко используется при решении классических задач Дирихле, Неймана и других краевых задач для областей произвольной формы. Но, в то же время, граничные условия и спектральные задачи объемного потенциала до недавнего времени не исследовались. То есть, несмотря на глубокие исследования общей теории объемного потенциала, до недавнего времени объемный потенциал Ньютона:

$$u_{NP}(x) = \int_{\Omega} \varepsilon(x-y) f(y) dy$$

не рассматривался как независимый оператор, являющийся решением некоторой краевой задачи. Такие ученые, как Engquist B. и Majda A. [40], Givoli D. [41-43], Li J.R., Greengard L. [44], Hagstrom T. [45], Tsynkov S.V. [46], Wu X. и Zhang J. [47] использовали основы теории краевых задач для различных видов объемных потенциалов для решения различных задач математической физики и численных расчетов.

В работе Т.Ш. Кальменова и Д. Сурагана [48] впервые были построены граничные условия объемного потенциала u_{NP} для случая многомерного оператора Лапласа. Новые нелокальные граничные условия, которые однозначно определяют объемный потенциал Ньютона, имеют вид

$$\frac{u(x)}{2} - \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial \varepsilon(x-y)}{\partial n_y} u(y) - \varepsilon(x-y) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} \right) dS_y = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

Несмотря на сложность этих граничных условий, они были довольно удобны в использовании. Используя эти граничные условия, в [49] были построены все собственные значения и собственные функции для объемного потенциала в двумерном круге и трехмерном шаре.

След потенциала Ньютона на граничной поверхности появился в работе Кас, где он назвал это принципом отсутствия ощущения границы и провел последующий спектральный анализ. Это было дополнительно расширено в книге Кас [50] с несколькими дальнейшими приложениями к спектральной теории и асимптотике функций подсчета собственных значений Вейля. Для получения общих справочных сведений о потенциальной теории дробной диффузии мы ссылаемся на [51-54].

В [55] было показано, что самосопряженные дифференциальные операторы порождаются граничными условиями. Далее были построены граничные условия для несамосопряженных операторов. В [56] рассматривается начально-краевая объемная задача для волнового уравнения в области с прямолинейными границами. В [57] рассмотрено обобщенный тепловой потенциал для вырожденного (теплового) уравнения диффузии, которое удовлетворяет начальному условию относительно временной переменной. В этой работе найдено граничное условие для этого потенциала. Нелокальная начально-краевая задача для уравнения дробной диффузии по времени для лапласиана Кона и его степеней в группе Гейзенберга была недавно исследована Ружанский и Сураганом в [58], а также в [59] для общих стратифицированных групп Ли.

Изучение корректности нелокальных задач для гиперболических уравнений с интегральными условиями в последнее время является актуальной проблемой. Одной из первых работ в этом направлении была статья Л.С. Пулькина [60], в которой доказывается существование и единственность обобщенного решения гиперболического уравнения второго порядка с интегральными условиями в прямоугольнике. В [61] рассматривалась краевая задача для одномерного гиперболического уравнения с нелокальными начальными данными в интегральной форме. В статье [62], рассматривалась задача для гиперболического уравнения со стандартными начальными данными и нелокальным интегралом второго рода, которое вырождается и превращается в первый вид.

Об обобщенной разрешимости разных задач для гиперболического уравнения и для вырождающегося гиперболического уравнения занималься Н.Ю. Капустин [63-65].

В данной части исследовано задача построения граничных условий для одномерного гиперболического объемного потенциала в области с криволинейной границей. Показано, что решение краевой задачи однозначно определяется объемным потенциалом.

7.1 Постановка задачи

Пусть $Q \subset \mathbb{R}^2$ конечная область (рисунок 6), ограниченная по бокам $x = \alpha_1(t)$ и $x = \beta_1(t)$, и ограниченная сверху и снизу сегментами $t = 0$, $0 < x < 1$ и

$t = T$, $x_0 < x < x_1$. Здесь $T > 0$, $\alpha_1(0) = 0$, $\beta_1(0) = 1$, $\alpha_1(T) = x_0$, $\beta_1(T) = x_1$, $\alpha_1(t) < \beta_1(t)$.

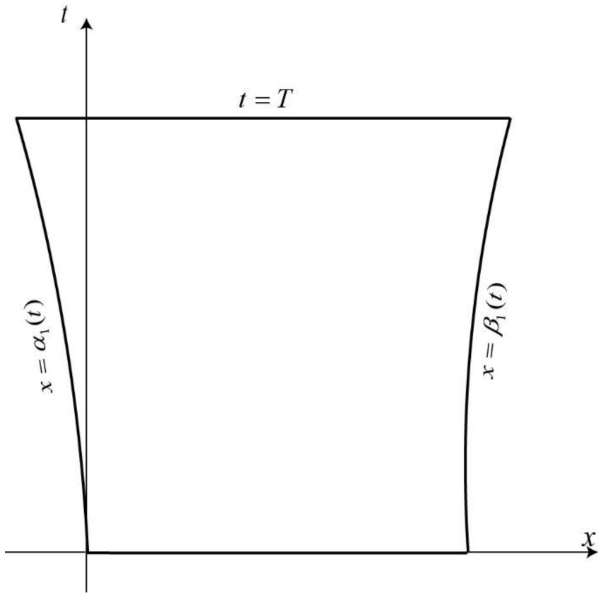

Рисунок 6 – Область Q

Рассмотрим общее гиперболическое уравнение второго порядка

$$Lu \equiv \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + a_1(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} +$$

$$+b_1(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + c_1(x,t)u(x,t) =$$

$$= f_1(x,t), (x,t) \in Q, \tag{7.1.1}$$

с начальными условиями вида:

$$u(x,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, 0 \le x \le 1, \tag{7.1.2}$$

где $a_1, b_1, c_1 \in C^1(\overline{Q})$. Предположим, что

$$|\alpha_1'(t)| < 1, \quad |\beta_1'(t)| < 1. \tag{7.1.3}$$

Хорошо известно, что при $T > 1/2$ решение гиперболического уравнения (7.1.1) в Q восстанавливается при начальных условиях (7.1.2) не однозначно. Для единственности необходимо использовать граничные условия. Мы ставим задачу построить граничные условия, при которых (вместе с начальными условиями) решение уравнения (7.1.1) в Q будет однозначно определено в виде объемного гиперболического потенциала (см. уравнение (7.1.4)). В случае, когда $\alpha(t) \equiv 0$, $\beta(t) \equiv 1$ и a_1, b_1, $c_1 = 0$ эта задача рассматривалась в [66]. Когда область Q остается прежним и a_1, b_1, $c_1 = 0$, этот случай рассматривался в [67].

Пусть $Q_{x,t}$ будет из Q: $Q_{x,t} = \{(x_1, t_1) \in Q: |x - x_1| < t - t_1\}$. В Q имеем объемный гиперболический потенциал вида:

$$u(x,t) = -\iint_{\Omega_{x,t}} R_1(x,t;x_1,t_1) f_1(x_1,t_1) dx_1 dt_1 \qquad (7.1.4)$$

где $R_1(x,t;x_1,t_1)$ функция Римана-Грина [38, с. 2], который удовлетворяет однородному сопряженному уравнению

$$L_1^* R_1 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial t_1} R(x,t;x_1,t_1) - \frac{\partial}{\partial x_1}\big(a_1(x_1,t_1) R(x,t;x_1,t_1)\big) -$$

$$-\frac{\partial}{\partial t_1}(R(x,t;x_1,t_1) b_1(x_1,t_1)) + c_1(x_1,t_1) R(x,t;x_1,t_1) = 0, (x,t) \in \Omega,$$

и следующим условиям на характеристике:

$$\frac{\partial R_1(x,t;x_1,t_1)}{\partial x_1} - b_1(x_1,t_1) R_1(x,t;x_1,t_1) = 0, \qquad \text{при } x_1 = x;$$

$$\frac{\partial R_1(x,t;x_1,t_1)}{\partial t_1} - a_1(x_1,t_1) R_1(x,t;x_1,t_1) = 0, \qquad \text{при } t_1 = t;$$

$$R_1(x,t;x,t) = 1.$$

В характеристических координатах $\xi = x + t, \eta = x - t$ уравнение (7.1.1) имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial \xi \partial \eta} + a \frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \xi} + b \frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \eta} + c u(\xi,\eta) = f(\xi,\eta), (\xi,\eta) \in \Omega, \qquad (7.1.5)$$

и начальные условия (7.1.2) будет в следующем виде:

$$u = \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, \ \text{при } \xi = \eta, 0 \le \eta \le 1, \qquad (7.1.6)$$

где $a(\xi,\eta), b(\xi,\eta), c(\xi,\eta) \in C^1(\overline{\Omega})$ и

$$a(\xi,\eta) = \frac{1}{4}\left(a_1\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2}\right) + b_1\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2}\right)\right),$$

$$b(\xi,\eta)=\frac{1}{4}\left(a_1\left(\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\xi-\eta}{2}\right)-b_1\left(\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\xi-\eta}{2}\right)\right),$$

$$c(\xi,\eta)=\frac{1}{4}c_1\left(\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\xi-\eta}{2}\right), f(\xi,\eta)=\frac{1}{4}f_1\left(\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\xi-\eta}{2}\right).$$

Здесь $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ область огрниченная по бокам кривыми $\xi=\alpha(\eta)$ и $\xi=\beta(\eta)$, и ограничена сверху и снизу сегментами $\xi-\eta=0$ и $\xi-\eta=2T$. Здесь $\alpha(0)=0, \beta(1)=1, \alpha(\eta)<\beta(\eta)$. Из (7.1.3) имеем

$$-\infty<\alpha'(\eta)<0, \tag{7.1.7}$$

$$-\infty<\beta'(\eta)<0. \tag{7.1.8}$$

7.2 Построение граничных условий

Пусть $\Omega_{\xi,\eta}$ часть Ω: $\Omega_{\xi,\eta}=\{(\xi_1,\eta_1)\in\Omega: \xi_1<\xi,\eta_1>\eta\}$. Тогда объемный потенциал (7.1.4) может быть записан в виде:

$$u(\xi,\eta)=-\iint_{\Omega_{\xi,\eta}} R(\xi,\eta;\xi_1\eta_1)f(\xi_1,\eta_1)d\xi_1 d\eta_1 \tag{7.2.1}$$

где $R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)$ - функция Римана-Грина [38, с. 2], который удовлетворяет следующим уравнениям:

$$L^*R\equiv\frac{\partial^2}{\partial\xi_1\partial\eta_1}R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)-\frac{\partial}{\partial\xi_1}\big(a(\xi_1,\eta_1)R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)\big)-$$

$$-\frac{\partial}{\partial\eta_1}(b(\xi_1,\eta_1)R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1))+c(\xi_1,\eta_1)R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)=0,(\xi,\eta)\in\Omega; \tag{7.2.2}$$

$$\frac{\partial R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)}{\partial\xi_1}-b(\xi_1,\eta_1)R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)=0, \text{при } \xi_1=\xi; \tag{7.2.3}$$

$$\frac{\partial R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)}{\partial\eta_1}-a(\xi_1,\eta_1)R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)=0, \text{ при } \eta_1=\eta; \tag{7.2.4}$$

$$R(\xi,\eta;\xi,\eta)=1. \tag{7.2.5}$$

Очевидно, что для любого $f(\xi,\eta)\in C^1(\overline{\Omega})$ объемный потенциал (7.2.1) дает классическое решение неоднородного гиперболического уравнения (7.1.5) из класса $u(\xi,\eta)\in C^2(\overline{\Omega})$. Наша задача состоит в том, чтобы построить однородные граничные условия на боковых границах $\xi=\alpha(\eta)$ и $\xi=\beta(\eta)$, которым объемный потенциал (7.2.1) удовлетворяет для всех $f(\xi,\eta)$.

Мы отдельно рассмотрим различные случаи размещения $\Omega_{\xi,\eta}$ внутри Ω.

Случай I

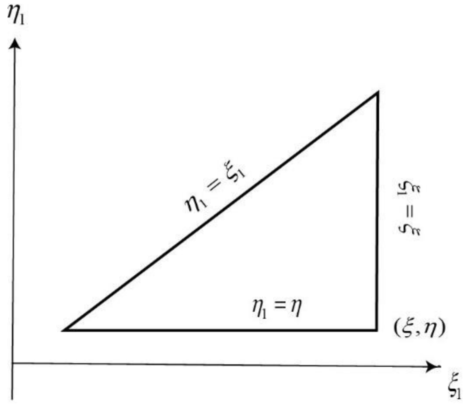

Рисунок 7 – Область $\Omega_{\xi,\eta}$ в случае I

Во-первых, мы рассмотрим случай, когда $0 < \eta < \xi < 1, (\xi, \eta) \in \Omega$. В этом случае $\Omega_{\xi,\eta}$ представляет собой треугольник (рисунок 7), который ограничен сверху $\xi_1 = \xi$, ограничен снизу $\eta_1 = \eta$ и ограничен справа $\xi_1 = \eta_1$. В этом случае область $\Omega_{\xi,\eta}$ нигде не касается боковых границ Ω.

Поэтому нет необходимости строить граничные условия для объемного гиперболического потенциала. Прямым расчетом легко увидеть, что объемный потенциал (7.2.1) удовлетворяет однородным начальным условиям (7.1.6).

Случай II

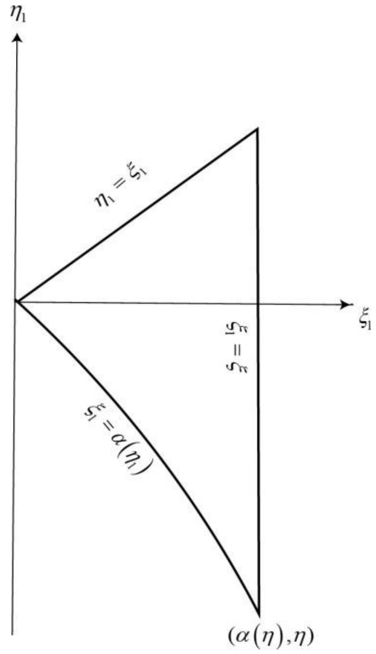

Рисунок 8 – Область $\Omega_{\xi,\eta}$ в случае II

Случай, когда $\xi < 1, \eta < 0, (\xi, \eta) \in \Omega$. Пусть $\xi = \alpha(\eta)$, тогда $\Omega_{\alpha(\eta),\eta} = \{(\alpha(\eta), \eta) \in \Omega: \eta_1 < \xi_1 < \alpha(\eta), \quad \text{при} \quad \eta_1 > 0; \ \alpha(\eta_1) < \xi_1 < \alpha(\eta), \quad \text{при} \ \eta_1 < 0\}$ представляет собой криволинейный треугольник (рисунок 8), который ограничен справа $\xi_1 = \alpha(\eta)$, ограничен снизу $\xi_1 = \alpha(\eta_1)$ и ограничен сверху $\xi_1 = \eta_1$.

В дальнейшем мы будем использовать теорему Грина на плоскости [27, p. 384-387]: Пусть C - положительно ориентированная, кусочно-гладкая, простая замкнутая кривая на плоскости, и пусть D - область, ограниченная C. Если L и M являются функциями (ξ_1, η_1), определенными в открытой области, содержащей D, и имеют непрерывные частные производные, тогда

$$\oint_C (L\, d\xi_1 + M\, d\eta_1) = \iint_D \left(\frac{\partial M}{\partial \xi_1} - \frac{\partial L}{\partial \eta_1}\right) d\xi_1\, d\eta_1,$$

где левая сторона представляет собой линейный интеграл, а правая сторона представляет собой поверхностный интеграл, а путь интегрирования вдоль C направлен против часовой стрелки.

Применяя теорему Грина на плоскости, из (7.2.1) получаем следующую цепочку равенств:

$$u(\alpha(\eta), \eta) = -\iint_{\Omega_{\alpha(\eta),\eta}} R(\alpha(\eta), \eta; \xi_1 \eta_1) f(\xi_1, \eta_1) d\xi_1 d\eta_1 =$$

$$= -\iint_{\Omega_{\alpha(\eta),\eta}} (RLu - uL^* R) d\xi_1 d\eta_1 =$$

$$= -\oint_{\partial\Omega_{\alpha(\eta),\eta}} \left(-bRu + \frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial \xi_1} u - \frac{1}{2} R \frac{\partial u}{\partial \xi_1}\right) d\xi_1 + \left(aRu - \frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial \eta_1} u + \frac{1}{2} R \frac{\partial u}{\partial \eta_1}\right) d\eta_1.$$

Вычисляя полученные линейные интегралы с учетом начальных условий (7.1.6) и условий (7.2.2)-(7.2.4) имеем

$$I_\alpha u \equiv \int_0^\eta \frac{\partial u(\alpha(\eta_1), \eta_1)}{\partial \eta_1} R(\alpha(\eta), \eta; \alpha(\eta_1), \eta_1) d\eta_1 +$$

$$+ \int_0^\eta u(\alpha(\eta_1), \eta_1) R(\alpha(\eta), \eta; \alpha(\eta_1), \eta_1) \big(a(\alpha(\eta_1), \eta_1) - b(\alpha(\eta_1), \eta_1) \alpha'(\eta_1)\big) d\eta_1 -$$

$$- \int_0^\eta u(\alpha(\eta_1), \eta_1) \frac{\partial R(\alpha(\eta), \eta; \alpha(\eta_1), \eta_1)}{\partial \xi_1} d\eta_1 = 0. \qquad (7.2.6)$$

Обратите внимание, что (7.2.6) является условием на границе $\xi = \alpha(\eta)$, соединяющим значения функции u и ее производной на этой границе.

Случай III

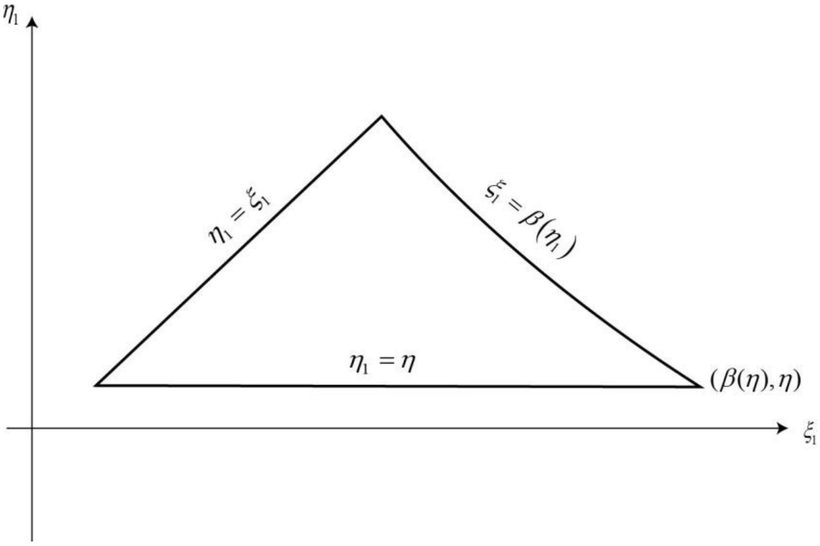

Рисунок 9 – Область $\Omega_{\xi,\eta}$ в случае III

Рассмотрим случай, когда $0 < \eta, 1 < \xi, (\xi, \eta) \in \Omega$. Пусть $\xi = \beta(\eta)$, тогда $\Omega_{\beta(\eta),\eta} = \{(\beta(\eta), \eta) \in \Omega: \eta_1 < \xi_1 < \beta(\eta_1) \,\&\, \eta_1 > \eta\}$ представляет собой криволинейный треугольник (рисунок 9), который ограничен справа $\xi_1 = \beta(\eta_1)$, ограничен снизу $\eta_1 = \eta$ и ограничен слева $\xi_1 = \eta_1$.

Аналогично, как и в случае II, применяя теорему Грина, из (7.2.1) имеем граничное условие

$$I_\beta u \equiv \int_1^\eta \frac{\partial u(\beta(\eta_1), \eta_1)}{\partial \xi_1} R(\beta(\eta), \eta; \beta(\eta_1), \eta_1) \beta'(\eta_1) d\eta_1 -$$

$$-\int_1^\eta u(\beta(\eta_1), \eta_1) R(\beta(\eta), \eta; \beta(\eta_1), \eta_1) \big(a(\beta(\eta_1), \eta_1) - b(\beta(\eta_1), \eta_1) \beta'(\eta_1)\big) d\eta_1 +$$

$$+\int_1^\eta u(\beta(\eta_1), \eta_1) \frac{\partial R(\beta(\eta), \eta; \beta(\eta_1), \eta_1)}{\partial \eta_1} d\eta_1 = 0. \qquad (7.2.7)$$

Обратите внимание, что (7.2.7) является условием на границе $\xi = \beta(\eta)$, соединяющим значения функции u и ее производной на этой границе.

Случай IV

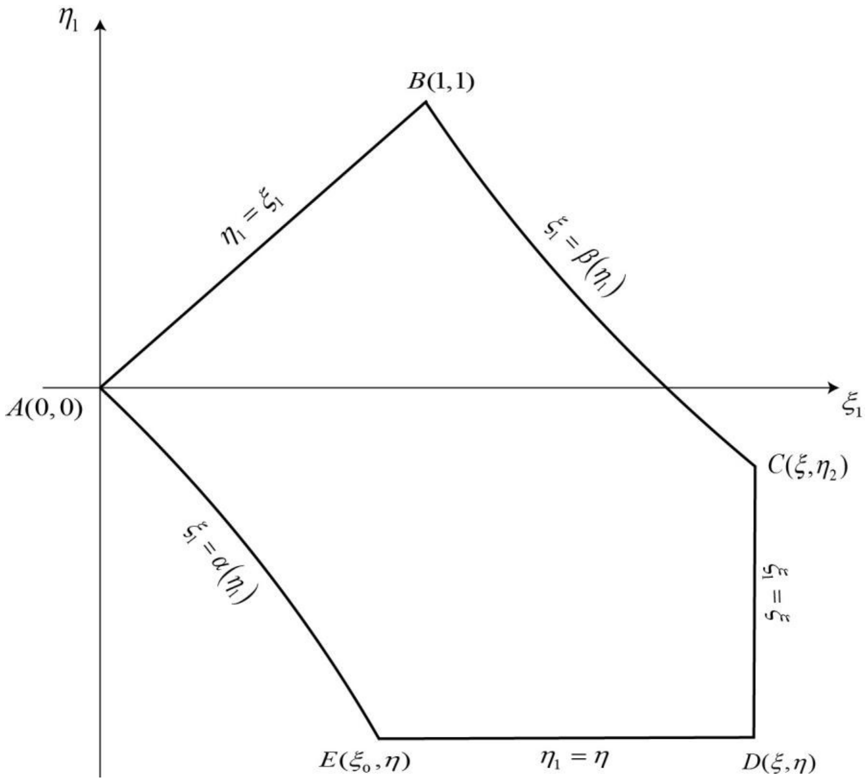

Рисунок 10 – Область $\Omega_{\xi,\eta}$ в случае IV.

Рассмотрим область, когда $\eta < 0$ и $1 < \xi$. В этом случае область $\Omega_{\xi,\eta}$ является криволинейным пентагоном (рисунок 10), которая ограничена сверху $\xi_1 = \beta(\eta_1)$ и $\eta_1 = \xi_1$, ограничена снизу $\xi_1 = \alpha(\eta_1)$ и $\eta_1 = \eta$, ограничен справа $\xi_1 = \xi$.

Применим теорему Грина в плоскости для объемного гиперболического потенциала

$$u(\xi,\eta) = -\iint_{\Omega_{\xi,\eta}} R(\xi,\eta;\xi_1\eta_1)f(\xi_1,\eta_1)d\xi_1 d\eta_1 =$$

$$= -\iint_{\Omega_{\xi,\eta}} (RLu - uL^*R)d\xi_1 d\eta_1 =$$

$$= -\oint_{\partial\Omega_{\xi,\eta}} \left(-bRu + \frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial \xi_1}u - \frac{1}{2}R\frac{\partial u}{\partial \xi_1}\right)d\xi_1 + \left(aRu - \frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial \eta_1}u + \frac{1}{2}R\frac{\partial u}{\partial \eta_1}\right)d\eta_1 =$$

$$= \int_{AE} \left(-bRu + \frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial \xi_1}u - \frac{1}{2}R\frac{\partial u}{\partial \xi_1}\right)d\xi_1 + \left(aRu - \frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial \eta_1}u + \frac{1}{2}R\frac{\partial u}{\partial \eta_1}\right)d\eta_1 +$$

$$+ \int_{ED} \left(-bRu + \frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial \xi_1}u - \frac{1}{2}R\frac{\partial u}{\partial \xi_1}\right)d\xi_1 + \left(aRu - \frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial \eta_1}u + \frac{1}{2}R\frac{\partial u}{\partial \eta_1}\right)d\eta_1 +$$

$$+\int_{DC}\left(-bRu+\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial\xi_1}u-\frac{1}{2}R\frac{\partial u}{\partial\xi_1}\right)d\xi_1+\left(aRu-\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial\eta_1}u+\frac{1}{2}R\frac{\partial u}{\partial\eta_1}\right)d\eta_1+$$

$$+\int_{CB}\left(-bRu+\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial\xi_1}u-\frac{1}{2}R\frac{\partial u}{\partial\xi_1}\right)d\xi_1+\left(aRu-\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial\eta_1}u+\frac{1}{2}R\frac{\partial u}{\partial\eta_1}\right)d\eta_1+$$

$$+\int_{BA}\left(-bRu+\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial\xi_1}u-\frac{1}{2}R\frac{\partial u}{\partial\xi_1}\right)d\xi_1+\left(aRu-\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial\eta_1}u+\frac{1}{2}R\frac{\partial u}{\partial\eta_1}\right)d\eta_1.$$

Тогда получим равенство:

$$\int_1^{\eta_2}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial R(\xi,\eta;\beta(\eta_1),\eta_1)}{\partial\xi_1}u(\beta(\eta_1),\eta_1)\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\frac{\partial u(\beta(\eta_1),\eta_1)}{\partial\xi_1}R(\xi,\eta;\beta(\eta_1),\eta_1)\right)\beta'(\eta_1)d\eta_1-$$

$$-\int_1^{\eta_2}b(\beta(\eta_1),\eta_1)R(\xi,\eta;\beta(\eta_1),\eta_1)u(\beta(\eta_1),\eta_1)\beta'(\eta_1)d\eta_1+$$

$$+\int_1^{\eta_2}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial u(\beta(\eta_1),\eta_1)}{\partial\eta_1}R(\xi,\eta;\beta(\eta_1),\eta_1)-\frac{1}{2}\frac{\partial R(\xi,\eta;\beta(\eta_1),\eta_1)}{\partial\eta_1}u(\beta(\eta_1),\eta_1)\right)d\eta_1$$
$$+$$

$$+\int_1^{\eta_2}a(\beta(\eta_1),\eta_1)R(\xi,\eta;\beta(\eta_1),\eta_1)u(\beta(\eta_1),\eta_1)d\eta_1-$$

$$-\int_0^{\eta}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial R(\xi,\eta;\alpha(\eta_1),\eta_1)}{\partial\xi_1}u(\alpha(\eta_1),\eta_1)\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\frac{\partial u(\alpha(\eta_1),\eta_1)}{\partial\xi_1}R(\xi,\eta;\alpha(\eta_1),\eta_1)\alpha'(\eta_1)\right)d\eta_1-$$

$$-\int_0^{\eta}b(\alpha(\eta_1),\eta_1)R(\xi,\eta;\alpha(\eta_1),\eta_1)u(\alpha(\eta_1),\eta_1)\alpha'(\eta_1)d\eta_1-$$

$$-\int_0^{\eta}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial u(\alpha(\eta_1),\eta_1)}{\partial\eta_1}R(\xi,\eta;\alpha(\eta_1),\eta_1)+\frac{1}{2}\frac{\partial R(\xi,\eta;\alpha(\eta_1),\eta_1)}{\partial\eta_1}u(\alpha(\eta_1),\eta_1)\right)d\eta_1$$
$$+$$

$$+\int_0^{\eta} a(\alpha(\eta_1),\eta_1)R(\xi,\eta,\alpha(\eta_1),\eta_1)u(\alpha(\eta_1),\eta_1)d\eta_1 -$$

$$-\tfrac{1}{2}R(\xi,\eta;\xi,\eta_2)u(\xi,\eta_2)-\tfrac{1}{2}R(\xi,\eta;\xi_0,\eta)u(\xi_0,\eta)=0, \qquad (7.2.8)$$

где $(\beta(\eta_2),\eta_2)$ точка пересечения $\xi_1=\beta(\eta_1)$ и $\xi_1=\xi$; и (ξ_0,η) точка пересечения $\xi_1=\alpha(\eta_1)$ и $\eta_1=\eta$.

В (7.2.8), приравнивая сначала $\xi=\alpha(\eta)$, а затем $\xi=\beta(\eta)$, получим два тождества

$$0=J_\alpha u\equiv I_\alpha u- \qquad (7.2.9)$$

$$-\int_1^{\eta_2}\left(\frac{\partial R(\alpha(\eta),\eta;\beta(\eta_1),\eta_1)}{\partial\eta_1}u(\beta(\eta_1),\eta_1)\right.$$
$$\left.-\frac{\partial u(\beta(\eta_1),\eta_1)}{\partial\xi_1}R(\alpha(\eta),\eta;\beta(\eta_1),\eta_1)\right)d\eta_1$$

$$+\int_1^{\eta_2}\big(a(\beta(\eta_1),\eta_1)-b(\beta(\eta_1),\eta_1)\beta'(\eta_1)\big)R(\alpha(\eta),\eta;\beta(\eta_1),\eta_1)u(\beta(\eta_1),\eta_1)d\eta_1,$$

$$0=J_\beta u\equiv I_\beta u+ \qquad (7.2.10)$$

$$+\int_0^{\eta}\left(\frac{\partial R(\beta(\eta),\eta;\alpha(\eta_1),\eta_1)}{\partial\eta_1}u(\alpha(\eta_1),\eta_1)\right.$$
$$\left.-\frac{\partial u(\alpha(\eta_1),\eta_1)}{\partial\eta_1}R(\beta(\eta),\eta;\alpha(\eta_1),\eta_1)\right)d\eta_1+$$

$$+\int_0^{\eta}(a(\alpha(\eta_1)),\eta_1)-b(\alpha(\eta_1),\eta_1)\alpha'(\eta_1))R(\beta(\eta),\eta;\alpha(\eta_1),\eta_1)u(\alpha(\eta_1),\eta_1)d\eta_1.$$

Обратите внимание, что (7.2.9) и (7.2.10) являются условиями, связывающими значения функции u и ее производной на границах $\xi=\alpha(\eta)$ и $\xi=\beta(\eta)$.

Таким образом, доказана следующая лемма:

Лемма 7.2.1 Объемный гиперболический потенциал (7.2.1) удовлетворяет гиперболическому уравнению (7.1.5), однородным начальным условиям (7.1.6) и граничным условиям:

$$\begin{cases} I_\alpha u = 0 & \text{при } \alpha(\eta) \leq 1, \\ J_\alpha u = 0 & \text{при } \alpha(\eta) \geq 1, \\ I_\beta u = 0 & \text{при } \eta \geq 0, \\ J_\beta u = 0 & \text{при } \eta \leq 0. \end{cases} \quad (7.2.11)$$

Следствия 7.2.2 Объемный гиперболический потенциал (7.2.1) является решением начально-краевой задачи (7.1.5), (7.1.6), (7.2.11).

7.3 Единственность решения задачи

Построенные граничные условия (7.2.1) будут однозначно определять объемный гиперболический потенциал (7.2.1), если начально-граничная задача (7.1.5), (7.1.6), (7.1.11) не имеет других решений, кроме (7.2.1).

Лемма 7.3.1 Решение начально-краевой задачи (7.1.5), (7.1.6), (7.2.11) является единственным.

Доказательство Как обычно, через $u_1(\xi;\eta)$ и $u_2(\xi;\eta)$ обозначим два решения начально-краевой задачи (7.1.5), (7.1.6), (7.2.11). Тогда их разность $u(\xi;\eta) = u_1(\xi;\eta) - u_2(\xi;\eta)$ удовлетворяет однородному гиперболическому уравнению:й

$$\frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial\xi\partial\eta} + a(\xi,\eta)\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial\xi} + b(\xi,\eta)\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial\eta} + c(\xi,\eta)u(\xi,\eta) = 0, (\xi,\eta) \in \Omega, \quad (7.3.1)$$

однородному начальному условию (7.1.6) и граничным условиям (7.2.11). Применим теорему Грина в плоскости к интегралу

$$0 = -\iint_{\Omega_{\xi,\eta}} R(\xi,\eta;\xi_1\eta_1)\cdot 0\cdot d\xi_1 d\eta_1 = -\iint_{\Omega_{\xi,\eta}} (RLu - uL^*R)d\xi_1 d\eta_1 =$$

$$= \int_1^{\eta_2}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial R(\xi,\eta;\beta(\eta_1),\eta_1)}{\partial\xi_1}u(\beta(\eta_1),\eta_1) - \frac{1}{2}\frac{\partial u(\beta(\eta_1),\eta_1)}{\partial\xi_1}R(\xi,\eta;\beta(\eta_1),\eta_1)\right)\beta'(\eta_1)d\eta_1 -$$

$$-\int_1^{\eta_2} b(\beta(\eta_1),\eta_1)R(\xi,\eta;\beta(\eta_1),\eta_1)u(\beta(\eta_1),\eta_1)\beta'(\eta_1)d\eta_1 +$$

$$+\int_1^{\eta_2}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial u(\beta(\eta_1),\eta_1)}{\partial\eta_1}R(\xi,\eta;\beta(\eta_1),\eta_1) - \frac{1}{2}\frac{\partial R(\xi,\eta;\beta(\eta_1),\eta_1)}{\partial\eta_1}u(\beta(\eta_1),\eta_1)\right)d\eta_1 +$$

$$+\int_1^{\eta_2} a(\beta(\eta_1),\eta_1)R(\xi,\eta;\beta(\eta_1),\eta_1)u(\beta(\eta_1),\eta_1)d\eta_1 -$$

$$-\int_0^{\eta}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial R(\xi,\eta;\alpha(\eta_1),\eta_1)}{\partial\xi_1}u(\alpha(\eta_1),\eta_1)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\frac{\partial u(\alpha(\eta_1),\eta_1)}{\partial\xi_1}R(\xi,\eta;\alpha(\eta_1),\eta_1)\alpha'(\eta_1)\right)d\eta_1 -$$

$$-\int_0^{\eta} b(\alpha(\eta_1),\eta_1)R(\xi,\eta;\alpha(\eta_1),\eta_1)u(\alpha(\eta_1),\eta_1)\alpha'(\eta_1)d\eta_1 -$$

$$-\int_0^{\eta}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial u(\alpha(\eta_1),\eta_1)}{\partial\eta_1}R(\xi,\eta;\alpha(\eta_1),\eta_1)+\frac{1}{2}\frac{\partial R(\xi,\eta;\alpha(\eta_1),\eta_1)}{\partial\eta_1}u(\alpha(\eta_1),\eta_1)\right)d\eta_1 +$$

$$+\int_0^{\eta} a(\alpha(\eta_1),\eta_1)R(\xi,\eta,\alpha(\eta_1),\eta_1)u(\alpha(\eta_1),\eta_1)d\eta_1 -$$

$$-\tfrac{1}{2}R(\xi,\eta;\xi,\eta_2)u(\xi,\eta_2)-\tfrac{1}{2}R(\xi,\eta;\xi_0,\eta)u(\xi_0,\eta)+u(\xi,\eta)=0. \quad (7.3.2)$$

В (7.3.2), приравнивая сначала $\xi=\alpha(\eta)$, а затем $\xi=\beta(\eta)$, получим два тождества:

$$-J_\alpha u+u(\alpha(\eta),\eta)=0, \quad (7.3.3)$$

и

$$-J_\beta u+u(\beta(\eta),\eta)=0. \quad (7.3.4)$$

Принимая во внимание однородные граничные условия (7.2.11), из (7.3.3), (7.3.4) получим, что

$$u(\alpha(\eta),\eta)=0, \eta<\eta_0, \quad (7.3.5)$$

$$u(\beta(\eta),\eta)=0, \eta<0, \quad (7.3.6)$$

где $\alpha(\eta_0)=1$. Аналогично для случая II и случая III имеем

$$u(\alpha(\eta),\eta)=0, \eta_0<\eta, \quad (7.3.7)$$

$$u(\beta(\eta),\eta)=0, \eta>0. \quad (7.3.8)$$

Таким образом, функция $u(\xi,\eta)$ удовлетворяет однородному гиперболическому уравнению (7.1.5), однородным начальным условиям (7.1.6) и граничным условиям (7.3.5)-(7.3.8). В силу единственности его решения мы имеем $u(\xi,\eta)=0$ при $(\xi,\eta)\in\Omega$. Следовательно, $u_1(\xi,\eta)=u_2(\xi,\eta)$. Лемма 7.3.1 доказана.

7.4 Основные результаты

Определение 7.4.1. Классическим решением начально-краевой задачи (7.1.5), (7.1.6), (7.2.11) мы называем функцию $u(\xi,\eta)$ из класса $u(\xi,\eta)\in C^2(\overline{\Omega})$, удовлетворяющую уравнению (7.1.5) и начальным условиям (7.1.6) и граничным условиям (7.2.11).

Объединяя результаты леммы 7.2.1 и леммы 7.3.1, мы получаем основной результат работы.

Теорема 7.4.2. Пусть $f(\xi,\eta)\in C^1(\overline{\Omega})$. Объемный гиперболический потенциал (7.2.1) удовлетворяет гиперболическому уравнению (7.1.5), однородным начальным условиям (7.1.6), граничным условиям (7.2.11).

И наоборот, для любого $f(\xi,\eta)\in C^1(\overline{\Omega})$ начальная краевая задача (7.1.5), (7.1.6), (7.2.11) имеет единственное классическое решение $u(\xi,\eta)\in C^2(\overline{\Omega})$, и это решение представлено в виде гиперболического потенциала (7.2.1).

Следствие 7.4.3. Граничные условия (7.2.11) вместе с начальными условиями (7.1.6) однозначно определяют объемный гиперболический потенциал (7.2.1), т. е. являются граничными условиями гиперболического потенциала (7.2.1).

Результаты в этом направлений дано в работе [68].

7.5 Случай волнового потенциала

В этой части мы рассмотрим частный случай, когда $a,b,c=0$. В этом случае

$$R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)=1.$$

В случае II из уравнения (7.2.6), подставляя $\xi=\alpha(\eta)$ и дифференцируя по η и принимая во внимание начальные условия (7.1.6), имеем следующее условие:

$$\frac{\partial u(\alpha(\eta),\eta_1)}{\partial\eta}=0,\eta_0<\eta<0. \qquad (7.5.1)$$

В случае III из уравнения (7.2.7), подставляющего $\xi=\beta(\eta)$ и дифференцирующего по η, имеем следующее условие:

$$\frac{\partial u(\beta(\eta),\eta)}{\partial\xi}=0,0<\eta<1. \qquad (7.5.2)$$

Для случая IV в частном случае из (7.2.8) имеем следующее тождество:

$$0 = -\int_1^{\eta_2} \frac{\partial u(\beta(\eta_1),\eta_1)}{\partial \xi_1} \beta'(\eta_1) d\eta_1 + \int_1^{\eta_2} \frac{\partial u(\beta(\eta_1),\eta_1)}{\partial \eta_1} d\eta_1 + \quad (7.5.3)$$

$$+\int_0^{\eta} \frac{\partial u(\alpha(\eta_1),\eta_1)}{\partial \xi_1} \alpha'(\eta_1) d\eta_1 - \int_0^{\eta} \frac{\partial u(\alpha(\eta_1),\eta_1)}{\partial \eta_1} d\eta_1 - u(\xi,\eta_2) - u(\xi_0,\eta)$$

Сначала, в (7.5.3), приравнивая $\xi = \alpha(\eta)$, а затем $\xi = \beta(\eta)$ и дифференцируя по η и принимая во внимание начальные условия (7.1.6), имеем следующие условия:

$$-\alpha'(\eta) \frac{\partial u(\beta(\eta_2),\eta_2)}{\partial \xi} = \frac{\partial u(\alpha(\eta),\eta)}{\partial \eta}, \eta_0 < \eta < 0, \quad (7.5.4)$$

$$-\frac{\partial u(\alpha(\eta),\eta)}{\partial \eta} = \frac{\partial u(\beta(\eta),\eta)}{\partial \xi} \beta'(\eta), 0 < \eta < 1. \quad (7.5.5)$$

Эти граничные условия более четко проявляются в переменных (x,t). В координатах (x,t) объемный гиперболический потенциал записывается в виде

$$u(x,t) = -\iint_{\Omega_{x,t}} f_1(x_1,t_1) dx_1 dt_1, \quad (7.5.6)$$

гиперболическое уравнение (7.1.1) имеет вид

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = f_1(x,t), (x,t) \in Q, \quad (7.5.7)$$

и начальные условия (7.1.2) имеют вид:

$$u(x,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, 0 \le x \le 1, \quad (7.5.8)$$

Для случая II, когда $x = \alpha_1(t)$ из (7.5.1) имеем:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t}\right)(\alpha_1(t),t) = 0, 0 < t < t_1. \quad (7.5.9)$$

Для случая III, когда $x = \beta_1(t)$ из (7.5.2) имеем:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}\right)(\beta_1(t),t) = 0, 0 < t < t_1. \quad (7.5.10)$$

Для случая IV из (7.5.4), (7.5.5), когда $x = \alpha_1(t)$ и $x = \beta_1(t)$, мы имеем следующие граничные условия на левой и правой сторонах области $Q_{x,t}$:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t}\right)(\alpha_1(t), t) =$$

$$= \frac{1+\alpha_1{}'(t)}{1-\alpha_1{}'(t)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}\right)(\beta_1(t_2(t)), t_2(t)), t_1 < t < T, \quad (7.5.11)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}\right)(\beta_1(t), t) =$$

$$= \frac{1-\beta_1{}'(t)}{1+\beta_1{}'(t)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t}\right)(\alpha_1(t_0(t)), t_0(t)), t_1 < t < T, \quad (7.5.12)$$

где $(\alpha_1(t_0(t)), t_0(t))$ - точка пересечения граничной кривой $x_1 = \alpha_1(t_1)$ и характеристик $x_1 = t_1 - t + \beta_1(t)$; $(\beta_1(t_2(t)), t_2(t))$ - точка пересечения граничной кривой $x_1 = \beta_1(t_1)$ и характеристик $x_1 = t + \alpha_1(t) - t_1$.

Тождество (7.5.11) справедливо для $t + \alpha_1(t) > 1$, а тождество (7.5.12) справедливо для $\beta_1(t) - t \ < 0$.

Оба полученных тождества (7.5.11), (7.5.12) связывают друг с другом следы переменных на левой и правой границах области $Q_{x,t}$. При этом, поскольку $t > t_2(t)$ и $t > t_0(t)$, то точки, в которых значения берутся в левых частях этих тождеств, находятся "выше", чем точки, в которых значения берутся в правых частях тождеств.

Лемма 7.5.1 Объемный волновой потенциал (7.5.1) удовлетворяет волновому уравнению (7.5.7), однородным начальным условиям (7.5.8), граничному условию на левой границе области:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t}\right)(\alpha_1(t), t) = 0, \quad \text{при} \quad 0 \le t \le T, \quad (7.5.13)$$

и граничному условию на правой границе области:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}\right)(\beta_1(t), t) = 0, \quad \text{при} \quad 0 \le t \le T. \quad (7.5.14)$$

Следствие 7.5.2 Объемный волновой потенциал (7.5.6) является решением начально-краевой задачи (7.5.7), (7.5.8), (7.5.13), (7.5.14).

Граничные условия (7.5.13), (7.5.14) имеют следующую физическую интерпретацию. Хорошо известно, что общее решение однородного уравнения (7.5.7), то есть уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (7.5.15)$$

является суперпозицией двух волн:

$$u(x, t) = \phi(x + t) + \psi(x - t),$$

один из которых $(\phi(x+t))$ простирается влево, а второй $(\psi(x-t))$ простирается вправо.

Легко видеть, что граничное условие (7.5.13) "прозрачно" для волны, идущей влево, то есть для волны вида $\phi(x+t)$. Аналогично, граничное условие (7.5.14) "прозрачно" для волны, идущей вправо, то есть для волны вида $\psi(x-t)$. Эти волны возникают при некотором ненулевом начальном возмущении:

$$u(x,0)=\tau(x), u_t(x,0)=\upsilon(x), \tag{7.5.16}$$

дано при $t=0$ на отрезке $0\le x\le 1$. Эти волны даются:

$$\phi(x+t)=\frac{1}{2}\tau(x+t)+\frac{1}{2}\int_a^{x+t}\upsilon(s)ds, \psi(x-t)=$$

$$=\frac{1}{2}\tau(x-t)+\frac{1}{2}\int_a^{x-t}\upsilon(s)ds.$$

Таким образом, если мы рассмотрим волновой процесс колебания бесконечной струны, описываемый уравнением (7.5.7) при $-\infty<x<+\infty, t>0$, с локально неоднородными начальными условиями (7.5.16) (то есть в случае, когда $supp\{\tau(x)\}\subset[0,1]$, а затем для изучения поведения струны на интервале $0\le \mathrm{x}\le 1$ достаточно рассмотреть решения уравнения (7.5.15) только при $0\le \mathrm{x}\le 1, \mathrm{t}>0$ с граничными условиями (7.5.13), (7.5.14). При $supp\{\upsilon(x)\}\subset[0,1])$), то для изучения поведения струны на интервале $0\le \mathrm{x}\le 1$ достаточно рассмотреть решения уравнения (7.5.15) только при $0\le x\le 1, t>0$ с граничными условиями (7.5.13), (7.5.14).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой PhD диссертации мы представляем результаты исследований по общему гиперболическому уравнению второго порядка с переменными коэффициентами.

Давайте рассмотрим основные полученные результаты в этой диссертации:

1. Дано определение и обоснована методика построения функции Грина для первой начально-краевой задачи в четверти плоскости для общего двумерного гиперболического уравнения второго порядка.

2. Дано определение и обоснована методика построения функции Грина для второй начально-краевой задачи в четверти плоскости для общего двумерного гиперболического уравнения второго порядка.

3. Дано определение функции Грина задачи Дарбу для гиперболического уравнения общего вида, рассматриваемого в характеристическом треугольнике с краевым условием первого рода на нехарактеристической границе и дано обоснование методики её построения.

4. Дано определение функции Грина для несимметричных характеристических краевых задач для гиперболического уравнения общего вида, рассматриваемого в характеристическом треугольнике с краевым условием первого рода на нехарактеристической границе и дано обоснование методики её построения.

5. Дано определение функции Грина для несимметричных характеристических краевых задач для гиперболического уравнения общего вида, рассматриваемого в характеристическом треугольнике с краевым условием второго рода на нехарактеристической границе и дано обоснование методики её построения.

6. Построен пример корректной характеристической краевой задачи, имеющей «неклассический» вид функции Грина.

7. Построена граничные условия объемного гиперболического потенциала в области с криволинейной границей.

Оценка полноты целей работы. Все полученные результаты являются новыми и основаны на нашем собственном методе. Подтверждением полноты целей диссертации является то, что результаты исследования были опубликованы в зарубежных рецензируемых научных журналах, проиндексированных в ведущих международных системах цитирования (библиографических базах данных), то есть Web of Science Clarivate Analytics и Scopus. Предложение по применению полученных результатов.

Значимость диссертационного исследования заключается в том, что впервые дано определение и метод построение функций Грина общего гиперболического уравнения с переменными коэффициентами. И результаты могут быть использованы для дальнейших исследований.

Оценка научного уровня работы в сравнении с достижениями в научном направлении. Задачи, рассматриваемые в диссертации, являются совершенно новыми и ранее не решались. Хотя в мире науки уже существует большое количество фундаментальных идей, которые активно развиваются зарубежными учеными, решение конкретных проблем требует разработки новых идей и различных подходов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Kreith K. Sturmian theorems for hyperbolic equations // Proc. Amer. Math. Soc. – 1969. – Vol. 22. – P. 277-281.

2 Kreith K. A Sturm theorem for partial differential equations of mixed type // Proc. Amer. Math. Soc. – 1981. – Vol. 81, №3-4. – P. 75-78.

3 Kreith K. A class of comparison theorems for nonlinear hyperbolic initial value problems // Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sec. A. – 1981. – Vol. 87, №3-4. – P. 189-191.

4 Swanson C.A. A dichotomy of PDE Sturmian theory // SIAM Review. – 1978. – Vol. 20, №2. – P. 285-300.

5 Kalmenov T.Sh. On the Spectrum of a Self-Adjoint Problem for the Wave Equation // Vestnik Akad. Nauk. Kazakh. SSR. – 1983. – Vol. 1, №3. – P. 63-66.

6 Kalmenov T.Sh. Spectrum of a boundary - value problem with translation for the wave equation // Differential equations. – 1983. – Vol. 19, №1. – P. 64-66.

7 Orynbasarov E. M., Sadybekov M. A. The basis property of the system of eigen- and associated functions of a boundary value problem with shift for the wave equation // Mathematical Notes. – 1992. – Vol. 51, №5-6. – P. 482-484.

8 Orynbasarov E. M., Sadybekov M. A. Baseness of the system of the eigenfunctions and associated functions with displacement of Lavrentev-Bitsadze equation // Doklady Akademii Nauk. – 1992. – Vol. 324, №6. – P. 1152-1154.

9 Yessirkegenov N. A., Sadybekov M. A. Spectral properties of boundary-value problem with a shift for wave equation // Russian Math. (Iz. VUZ). – 2016. – Vol. 60, №3. – P. 41-46.

10 Kreith K. A class of hyperbolic focal point problems // Hiroshima Mathematical Journal. – 1984. – Vol. 14, №1. – P. 203-210.

11 Krasnoselskii M. A. Positive Solutions of Operator Equations. – Groningen: P. Noordhoff Ltd, 1964. – 381 p.

12 Kreith K. Symmetric Green's functions for a class of CIV boundary value problems // Canad. Math. Bull. – 1988. – Vol. 31. – P. 272-279.

13 Kreith K. Establishing hyperbolic Green's functions via Leibniz's rule // SIAM Rev. – 1991. – Vol. 33. – P. 101-105.

14 Kreith K. A self-adjoint problem for the wave equation in higher dimensions // Comput. Math. Appl. – 1991. – Vol. 21, №5. – P. 129-132.

15 Kreith K. Mixed self-adjoint boundary conditions for the wave equation // Differential equations and its applications. – 1991. – Vol. 62. – P. 219-226.

16 Iraniparast N. A method of solving a class of CIV boundary value problems // Canad. Math. Bull. – 1992. – Vol. 35, №3. – P. 371-375.

17 Iraniparast N. A boundary value problem for the wave equation // Int. J. Math. Math. Sci. – 1999. – Vol. 22, №4. – P. 835-845.

18 Iraniparast N. A CIV boundary value problem for the wave equation // Appl. Anal. – 2000. – Vol. 76, №3. – P. 261-271.

19 Haws L. Symmetric Green’s functions for certain hyperbolic problems // Comput. Math. Appl. – 1991. – Vol. 21, №5. – P. 65-78.

20 Iraniparast N. Boundary value problems for a two-dimensional wave equation // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 1994. – Vol. 55. – P. 349-356.

21 Iraniparast N. A selfadjoint hyperbolic boundary-value problem // Journal of Electronic Journal of Differential Equations. – 2003. – Vol. 10. – P. 153-161.

22 Khurshudyan A.Z. Nonlinear Green’s functions for wave equation with quadratic and hyperbolic potentials // Advances in mathematical physics. – 2018. – Vol. 2018, №5. – P. 1-9.

23 Lopez Molina J.A. Green's function for the one-dimensional hyperbolic heat equation: remarks for global regularity // Boletin de le sociedad matematica mexicana. – 2020. – Vol. 26, №2. – P. 657-671.

24 Polidoro S., Ragusa M.A. Sobolev-Morrey spaces related to an ultraparabolic equation // Manuscripta Mathematica. – 1998. – Vol. 96. – P. 371-392.

25 Tyn Myint-U., Lokenath D. Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers. – Boston: Birkhauser, 2007. – 778 p.

26 Соболев С.Л. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. – 444 с.

27 Riley K.F., Hobson M.P., Bence S.J. Mathematical methods for physics and engineering. – Cambridge: University Press, 2006. – 1363 p.

28 Sadybekov M.A., Turmetov B.Kh., Torebek B.T. On an explicit form of the Green function of the Robin problem for the Laplace operator in a circle // Adv. Pure Appl. Math. – 2015. – Vol. 6, №3. – P. 163-172.

29 Sadybekov M.A., Torebek B.T., Turmetov B.Kh. Construction of Green’s function of the Neumann problem in a ball // Eurasian Math. J. –2016. – Vol. 7, №2. – P. 100-105.

30 Sadybekov M.A., Torebek B.T., Turmetov B.Kh. Representation of Green’s function of the Neumann problem for a multi-dimensional ball // Complex Variables and Elliptic Equations. –2016. – Vol. 61, №1. – P. 104-123.

31 Sadybekov M.A., Torebek B.T., Turmetov B.Kh. Representation of the Green’s function of the exterior Neumann problem for the Laplace operator // Siberian Math. J. –2017. – Vol. 58, №1. – P. 153-158.

32 Sadybekov M., Derbissaly B. On Green’s function of Cauchy–Dirichlet problem for hyperbolic equation in a quarter plane // Boundary Value Problems. – 2021. – Vol. 2021. – P. 69-1-69-23.

33 Sadybekov M., Derbissaly B. On the Green function of the Cauchy-Neumann problem for the hyperbolic equation in the quarter plane // Kazakh Mathematical Journal. – 2021. – Vol. 21, №1. – P. 89-106.

34 Sadybekov M., Derbissaly B. On Green’s function of Darboux problem for hyperbolic equation // Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика. – 2021. – Т. 111, №3. – С. 79-94.

35 Derbissaly B. On Green’s function of second Darboux problem for hyperbolic equation // Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика. – 2022. – Т. 116, №4. – С. 3-14.

36 Sadybekov M., Derbissaly B. On Green's function of asymmetric characteristic boundary value problem for hyperbolic equation in a characteristic triangle // Numerical Functional Analysis: procced. of the internat. conf. – Istanbul, 2021. – P. 2.

37 Кальменов Т.Ш., Бияров Б.Н. О нелокальной вольтерровой задаче для гиперболического уравнения // Известия АН КазССР. – 1988. – №5. – С. 13-16.

38 Copson E.T. On the Riemann – Green Function // Archive for Rational Mechanics and Analysis. – 1958. – Vol. 1. – P. 324-348.

39 Риман Б. О распространении плоских волн конечной амплитуды: соч. / пер. с нем. – М.: Гостехиздат, 1948. – 560 с.

40 Engquist B., Majda A. Radiation boundary conditions for acoustic and elastic wave calculations // Comm. Pure Appl. Math. – 1979. – Vol. 32. – P. 313-357.

41 Givoli D. Recent advances in the DtN finite element method for unbounded domains // Arch. Comput. Methods Eng. – 1999. – Vol. 6. – P. 71-116.

42 Givoli D. Numerical Methods for Problems in Infinite Domains // Elsevier, Amsterdam. – 1992. – 316 p.

43 Givoli D. Non-reflecting boundary conditions: a review // J. Comput. Phys. – 1991. – Vol. 94. – P. 1-29.

44 Greengard L., Li J.R. On the numerical solution of the heat equation I: Fast solvers in free space // J. Comput. Phys. – 2007. – Vol. 226, №2. – P. 1891-1901.

45 Hagstrom T. Radiation boundary conditions for the numerical simulation of waves // Acta Numer. – 1999. – Vol. 8. – P. 47-106.

46 Tsynkov S.V. Numerical solution of problems on unbounded domains // Appl. Numer. Math. – 1998. – Vol. 27. – P. 465-532.

47 Wu X., Zhang J. High-order local absorbing boundary conditions for heat equation in unbounded domains // Journal of Computational Mathematics. – 2011. – Vol. 1, №29. – P. 74-90.

48 Kal'menov T.Sh., Suragan D. A Boundary Condition and Spectral Problems for the Newton Potential // Operator Theory: Advances and Applications. – 2010. – Vol. 216. – P. 187-210.

49 Kal'menov T. Sh., Suragan D. To spectral problems for the volume potential // Doklady Mathematics. – 2009. – Vol. 80, №2. – P. 646-649.

50 Kac M. Integration in function spaces and some of its applications. – Pisa: Lezioni Fermiane, 1980. – 82 p.

51 Saito N. Data analysis and representation on a general domain using eigenfunctions of Laplacian // Appl. Comput. Harmon. Anal. – 2008. – Vol. 25, №1. – P. 68-97.

52 Kemppainen J. Properties of the single layer potential for the time fractional diffusion equation // J. Integral Equations Appl. – 2011. – Vol. 23, №3. – P. 437-455.

53 Kemppainen J., Ruotsalainen K. Boundary integral solution of the time-fractional diffusion equation // Integr. equ. oper. theory. – 2009. – Vol. 64, №2. – P. 239-249.

54 Aleroev T.S., Kirane M., Malik S.A. Determination of a source term for a time fractional diffusion equation with an integral type over-determining condition // Electronic Journal of Differential Equations. – 2013. – Vol. 270. – P. 1-16.
55 Kal'menov T.Sh., Suragan D.A Boundary Condition and Spectral Problems for the Newton Potential // Operator Theory: Advances and Applications. – 2010. – Vol. 216. – P. 187-210.
56 Kal'menov T.Sh., Suragan D. Initial-boundary value problems for the wave equation // Electronic Journal of Differential Equations. – 2014. – Vol. 48. – P. 1-6.
57 Sadybekov M.A., Oralsyn G. On trace formulae of the generalised heat potential operator // Pseudo-Differ. Oper. Appl. – 2018. – Vol. 9, №3. – P. 143-150.
58 Ruzhansky M., Suragan D. Layer potentials, Kac's problem, and refined Hardy inequality on homogeneous Carnot groups // Adv. Math. – 2017. – Vol. 308. – P. 483-528.
59 Ruzhansky M., Suragan D. On Kac's principle of not feeling the boundary for the Kohn Laplacian on the Heisenberg group // Proc. Amer. Math. Soc. – 2016. – Vol. 144, №2. – P. 709-721.
60 Pul'kina L.S. A non-local problem with integral conditions for hyperbolic equations // Electronic Journal of Diferential Equations. – 1999. – Vol. 1999, №45. – P. 1-6.
61 Kirichenko S.V., Pul'kina L.S. A problem with nonlocal initial data for one-dimensional hyperbolic equation // Russian Mathematics. – 2014. – Vol. 58, №9. – P. 13-21.
62 Pul'kina L.S. Nonlocal problems for hyperbolic equations with degenerate integral conditions // Electronic Journal of Diferential Equations. – 2016. – Vol. 2016, №193. – P. 1-12.
63 Капустин Н.Ю. Об обобщенной разрешимости в классе L_2 задачи Коши–Гурса для одного вырождающегося гиперболического уравнения // Докл. АН СССР. – 1985. – Т. 285, №6. – С. 1306-1309.
64 Капустин Н.Ю. О трех краевых задачах для гиперболического уравнения в характеристическом треугольнике // Докл. АН СССР. – 1985. – Т. 285, №3. – С. 555-558.
65 Капустин Н.Ю. О двух задачах для гиперболического уравнения в характеристическом треугольнике // Докл. АН СССР. – 1987. – Т. 293, №2. – С. 301-305.
66 Kal'menov T.Sh., Suragan D. Initial-boundary value problems for the wave equation // Electronic Journal of Differential Equations. – 2014. – Vol. 48. – P. 1-6.
67 Sadybekov M., Derbissaly B. On an initial-boundary value problem for the wave potential in a domain with a curvilinear boundary // Kazakh Mathematical journal. – 2018. – Vol. 18, №1. – P. 53-66.
68 Sadybekov M., Derbissaly B. Boundary conditions of volume hyperbolic potential in a domain with a curvilinear boundary // Kazakh Mathematical journal. – 2019. – Vol. 19, №4. – P. 27-45.